ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Πτυχιακή Εργασία

ΟΙ ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΥ SCHWINGER-DYSON

Σ. Κ. Αργυρόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Χ.Ν. Κτορίδης

ΑΘΗΝΑ 2008

Η συγγραφή της παρούσας πτυχιακής εργασίας έγινε στον Τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών κατά τα ακαδημαϊκά έτη 2006-2007 και 2007-2008.

Θα ήθελα απ΄ τη θέση αυτή να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα της εργασίας, Καθηγητή κ. Χ. Ν. Κτορίδη, τόσο για την ανάθεση ενός ιδιαίτερα ενδιαφέροντος θέματος όσο και για την οξυδερκή κι εμβριθή διδασκαλία του, η οποία μου άνοιξε νέους ορίζοντες στη θεωρητική φυσική.

Ευχαριστώ επίσης τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Α. Ι. Καρανίκα, για τη βοήθεια που μου παρείχε στο ΄κυνήγι των προσήμων΄ του 2ου Κεφαλαίου.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Δρ. Ε. Ν. Σαριδάκη, για την αμέριστη συμπαράστασή του καθ΄ όλη τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους και συναδέλφους μου, που με τον έναν ή τον άλλον τρόπο βοήθησαν στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Σ. Α.

Περιεχομενα

Περιληψη

Η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική είναι ανάμεσα στις πιο ακριβείς φυσικές θεωρίες που έχουν κατασκευαστεί. Η εξαιρετική συμφωνία μεταξύ θεωρίας και πειράματος οφείλεται στη μικρή ισχύ της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, η οποία καθιστά δυνατή την εφαρμογή της θεωρίας διαταραχών. Παρόλα αυτά, στην περιοχή ενεργειών όπου η ηλεκτρομαγνητική παράμετρος ζεύξης γίνεται μεγάλη, η θεωρία διαταραχών δεν παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα. Συνεπώς, για τη μελέτη φαινομένων στην περιοχή ισχυρής ζεύξης, πρέπει να καταφύγουμε σε μη-διαταρακτικές μεθόδους.

Η εργασία αυτή έχει ως κύριο στόχο να παρουσιάσει την αναλυτική, μη-διαταρακτική διατύπωση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής, στα πλαίσια του φορμαλισμού που ανέπτυξαν ξεχωριστά οι Schwinger και Dyson. Το Κεφάλαιο 1 αποτελεί μια εισαγωγή στο φορμαλισμό της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η διαταρακτική διατύπωση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής, η θεωρία επανακανονικοποίησης κι η σύνδεσή τους με τη θεωρία των κρίσιμων φαινομένων. Στο Κεφάλαιο 2, εκτίθεται αναλυτικά η διαδικασία εξαγωγής του συστήματος εξισώσεων Schwinger-Dyson στον κανονικό και συναρτησιακό φορμαλισμό. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η εφαρμογή των εξισώσεων Schwinger-Dyson στη μελέτη του μη-διαταρακτικού φαινομένου της θραύσης της χειραλικής συμμετρίας. Η παρουσίαση είναι αναλυτική και στηρίζεται στα αποτελέσματα της θεωρίας διακλαδώσεων για τις μη-γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hammerstein.

Κεφαλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις βασικές αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται η κβαντική θεωρία πεδίου. Η παρουσίαση είναι αρκετά γενική κι έχει ως σκοπό περισσότερο να εξοικιώσει τον αναγνώστη με τις θεωρητικές έννοιες και τις υπολογιστικές μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία αυτή και σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί μια πλήρη παρουσίαση του αντικειμένου της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Η περιγραφή που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο βασίζεται στη διαταρακτική διατύπωση της θεωρίας, έτσι όπως θεμελιώθηκε απ΄ τους Feynman, Schwinger και Tomonaga [1–5].

1.1 Η διαδικασία κβάντωσης των στοιχειωδών φυσικών συστημάτων

Η κβαντική μηχανική περιλαμβάνει δύο ξεχωριστές υποθέσεις: την αντιστοίχηση των παρατηρήσιμων μεγεθών με γραμμικούς ερμιτιανούς τελεστές και των φυσικών καταστάσεων με διανύσματα ενός χώρου Hilbert και απ΄ την άλλη τις σχέσεις μετάθεσης και τις εξισώσεις κίνησης για συγκεκριμένα δυναμικά συστήματα. Στη Λαγκρανζιανή διατύπωση της κλασσικής μηχανικής, οι εξισώσεις κίνησης είναι απόρροια της αρχής της στάσιμου δράσης. Στην περίπτωση των κβαντικών συστημάτων μπορεί να διατυπωθεί μια αντίστοιχη αρχή (αρχή του Schwinger), απ΄ την οποία θα απορρέουν τόσο οι εξισώσεις κίνησης όσο και οι κανόνες μετάθεσης. Για την απόδειξη της αρχής αυτής θα περιοριστούμε αρχικά στην περίπτωση ενός συστήματος με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας [6] ενώ η τελική διατύπωση θα γίνει στα πλαίσια της θεωρίας πεδίου (άπειροι βαθμοί ελευθερίας).

Θεωρούμε έναν απειροστό μετασχηματισμό της μορφής

$$\bar{t} = t + dt,$$

ο οποίος, ορίζοντας τον ερμιτιανό τελεστή $U = 1 - \frac{i}{\hbar}H$, παίρνει τη μορφή

$$\bar{t} = UtU^{-1},$$

με

$$dt = \frac{i}{\hbar}[t, H].$$

Η συνάρτηση μετασχηματισμού που συνδέει δυο καταστάσεις που απέχουν απειροστά στο χρόνο γράφεται

$$\langle q', t + dt | q'', t \rangle = \left\langle q', t \left| \left(1 - \frac{i}{\hbar} dt H(q(t), p(t), t) \right) \right| q'', t \right\rangle . \tag{1.1}$$

Μεταβάλλοντας απειροστά την κατάσταση $\langle q', t + dt|$, παίρνουμε

$$\delta_{q',t+dt} \langle q', t + dt| = \langle q', t + dt| \left(\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right) \tag{1.2}$$

και αντίστοιχα για την $|q'', t\rangle$

$$\delta_{q'',t}\left|q'',t\right\rangle = \left(\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial q'_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\delta t\right)\left|q'',t\right\rangle. \tag{1.3}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q'_\alpha}\left\langle q',t\right| &= \frac{i}{\hbar}\left\langle q',t\right| p_\alpha(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left\langle q',t\right| &= -\frac{i}{\hbar}\left\langle q',t\right| H(t), \end{aligned} \tag{1.4}$$

και ορίζοντας $\delta' = \delta_{q',t+dt} + \delta_{q'',t}$, οι (1.2),(1.3) γίνονται

$$\begin{aligned} \delta'\left\langle q', t+dt|q'',t\right\rangle &= \frac{i}{\hbar}\left\langle q', t+dt\right|\left(\sum_\alpha \left[p_\alpha(t+dt)\delta q_\alpha(t+dt) - p_\alpha(t)\delta q_\alpha(t)\right]\right. \\ &- \left.\mathrm{I}\left[H(t+dt)\delta(t+dt) - H(t)\delta t\right]\right)\left|q'',t\right\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\left\langle q', t+dt\right|\delta'\left(\sum_\alpha p_\alpha(t)\left[q_\alpha(t+dt) - q_\alpha(t)\right] - dtH(t)\right)\left|q'',t\right\rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Η μεταβολή στη δυναμική του συστήματος θα δίνεται απ΄ τη σχέση (βλ. Εξ. 1.1)

$$\delta''\left\langle q', t+dt|q'',t\right\rangle = \delta''\left\langle q', t+dt\right|\left(1 - \frac{i}{\hbar}dtH\right)\left|q'',t\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left\langle q', t+dt|dt\delta'' H|q'',t\right\rangle \tag{1.6}$$

κι επειδή $\delta = \delta' + \delta''$[1], οι (1.5),(1.6) δίνουν

$$\delta\left\langle q', t+dt|q'',t\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle q', t+dt|\delta W_{t+dt,t}|q'',t\right\rangle, \tag{1.7}$$

με

$$W_{t+dt,t} = dtL(t), \tag{1.8}$$

όπου $L(t)$ η Λαγκρανζιανή του συστήματος. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\delta W_{t+2dt,t} = \delta W_{t+2dt,t+dt} + \delta W_{t+dt,t}$, οπότε για μία πεπερασμένη μεταβολή $t_1 \to t_2$, οι (1.7), (1.8) δίνουν

$$\delta\left\langle q', t_1|q'',t_2\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle q', t_1\right|\delta\int_{t_1}^{t_2} dtLt\left|q'',t_2\right\rangle. \tag{1.9}$$

Η συνάρτηση μετασχηματισμού $\langle q', t_1|q'', t_2\rangle$ εξαρτάται μόνο απ΄ τις αρχικές και τελικές καταστάσεις και τη μορφή της Χαμιλτονιανής, η οποία περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του συστήματος. Για μια δεδομένη Χαμιλτονιανή, συνεπώς, θα έχουμε[2]

$$\begin{aligned} \delta\left\langle q', t_1\right| &= \frac{i}{\hbar}\left\langle q', t_1\right| G_1 \\ \delta\left|q'', t_2\right\rangle &= -\frac{i}{\hbar}G_2\left|q'', t_2\right\rangle, \end{aligned} \tag{1.10}$$

οπότε

$$\delta\left\langle q', t_1|q'',t_2\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle q', t_1\left|(G_1 - G_2)\right|q'',t_2\right\rangle. \tag{1.11}$$

[1]Αυτό προκύπτει απ΄ τις ιδιότητες της συνάρτησης μετασχηματισμού: $\langle q|q''\rangle = \int dq' \langle q|q'\rangle\langle q'|q''\rangle$. Βλ. [2].

[2]Έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $U = 1 + \frac{i}{\hbar}G$, όπου G απειροστός ερμιτιανός τελεστής που κατασκευάζεται απ΄ τις φυσικές μεταβλητές στο χρόνο t.

Συγκρίνοντας την (1.11) με την (1.9), βρίσκουμε τελικά

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2. \tag{1.12}$$

Η σχέση (1.12) αποτελεί την κβαντική έκφραση της αρχής της στάσιμου δράσης (**αρχή του Scwhinger**) [2]. Η παραπάνω σχέση εκφράζει το γεγονός ότι η μεταβολή της δράσης W_{12} (που σύμφωνα με την (1.9) εξαρτάται απ΄ τις μεταβλητές που ορίζονται για όλες τις τιμές μεταξύ t_1 και t_2) εξαρτάται μόνο απ΄ τις μεταβολές στα ακραία σημεία του διαστήματος $[t_1, t_2]$ ή αλλιώς η δράση παραμένει στάσιμη για οποιαδήποτε μεταβολή των μεταβλητών που ορίζονται για χρόνο $t_1 < t < t_2$.

1.1.1 Κβάντωση μέσω κανονικού φορμαλισμού

Ο φορμαλισμός που αναπτύχθηκε παραπάνω χρειάζεται δύο επεμβάσεις, για να μπορέσει να επεκταθεί στην περίπτωση μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου. Κατ΄ αρχήν μια θεωρία πεδίου διαθέτει άπειρους βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι συμπεριλαμβάνονται στους τελεστές των πεδίων $\psi_\alpha(\tilde{x})$, $\alpha = 1, 2, ...N$, $\tilde{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Η έννοια της Λαγκρανζιανής $L(q, p)$ οριζόμενης σε σημείο πρέπει να αντικατασταθεί με τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L}$, η οποία εξαρτάται γενικά από τα πεδία και τις πρώτες παραγώγους τους $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_\alpha, \partial_\mu\psi_\alpha)$. Επίσης η έννοια της χρονικής στιγμής, η οποία δεν παραμένει αναλλοίωτη στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, πρέπει να αντικατασταθεί με τη συναλλοίωτη έννοια της χωροειδούς επιφάνειας, η οποία είναι μια 3-διάστατη υπερεπιφάνεια στο χώρο Minkowski που ορίζεται απ΄ τη σχέση

$$(x - y)^\mu (x - y)_\mu = -f^2(x, y),$$

όπου $f(x, y)$ πραγματική συνάρτηση. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η δράση στην κβαντική θεωρία πεδίου θα γράφεται

$$W = \int_R d^4x \mathcal{L}(\psi_\alpha, \partial_\mu\psi_\alpha), \tag{1.13}$$

όπου R κάποιος όγκος στο χώρο Minkowski που φράσεται απ΄ τις χωροειδείς επιφάνειες σ_1 και σ_2. Με τις παραπάνω μετατροπές, το αξίωμα του Schwinger παίρνει τη μορφή[3]

$$\delta \langle \zeta_1, \sigma_1 | \zeta_2, \sigma_2 \rangle = i \left\langle \zeta_1, \sigma_1 \left| \delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \mathcal{L} \right| \zeta_2, \sigma_2 \right\rangle, \tag{1.14}$$

όπου ζ_1, ζ_2 σύνολα τελεστών που διαθέτουν το ίδιο φάσμα ιδιοτιμών και

$$\delta W_{12} = F(\sigma_1) - F(\sigma_2). \tag{1.15}$$

Υπολογίζοντας τώρα τη μεταβολή της δράσης απ΄ την (1.13), έχουμε[4]

$$\delta W = \int_{R'} \mathcal{L}(\psi_\alpha + \delta_0\psi_\alpha, \partial_\mu\psi_\alpha + \delta_0\partial_\mu\psi_\alpha) dx' - \int_R \mathcal{L}(\psi_\alpha, \partial_\mu\psi_\alpha) dx. \tag{1.16}$$

Εισάγοντας την Ιακωβιανή $\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}$ κι αναπτύσσοντας τον όρο στο πρώτο ολοκλήρωμα της (1.16) σε σειρά Taylor, παίρνουμε

$$\delta W = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \delta_0 \psi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \partial_\mu \delta_0 \psi_\alpha + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} dx \right). \tag{1.17}$$

[3]Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το φυσικό σύστημα μονάδων, στο οποίο $\hbar = c = 1$.

[4]Η ολική μεταβολή του πεδίου ορίζεται ως $\delta_0\psi = \psi'_\alpha(x) - \psi_\alpha(x)$, όπου το όρισμα του πεδίου ψ'_α αντιστοιχεί σε διαφορετικό γεωμετρικό σημείο απ΄ το όρισμα του ψ_α. Αντίστοιχα η τοπική μεταβολή του πεδίου ορίζεται ως $\delta\psi_\alpha = \psi'_\alpha(x') - \psi_\alpha(x)$, όπου τώρα τα δύο ορίσματα αντιστοιχούν στο ίδιο γεωμετρικό σημείο. Βλ. [7].

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον δεύτερο όρο του ολοκληρώματος και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss, καταλήγουμε τελικά στη σχέση

$$\delta W = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \right) \delta_0 \psi_\alpha dx + F[\sigma_2] - F[\sigma_1], \tag{1.18}$$

όπου

$$F[\sigma] \equiv \int_\sigma \left[\pi^\mu_\alpha \delta \psi_\alpha - \left(\pi^\mu_\alpha \partial_\nu \psi_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right] d\sigma_\mu \tag{1.19}$$

και[5]

$$\pi^\mu_\alpha(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha(x)}. \tag{1.20}$$

Για να είναι όμως η (1.18) συμβατή με την αρχή του Scwinger (Εξ. 1.15), θα πρέπει το ολοκλήρωμα στην (1.18) να μηδενίζεται. Εφόσον το χωρίο R και το $\delta_0 \psi_\alpha$ είναι τυχαία, θα πρέπει

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} = 0. \tag{1.21}$$

Βλέπουμε συνεπώς ότι, όπως και στην κλασσική μηχανική έτσι και στην κβαντική θεωρία πεδίου, η απαίτηση να ικανοποιείται η αρχή της στάσιμου δράσης οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης των πεδίων. Για να βρούμε τους κανόνες κβάντωσης των πεδίων, εργαζόμαστε ως εξής. Επιλέγουμε μια κλάση κανονικών μετασχηματισμών για τους οποίους ισχύει $\delta x^\nu = 0$. Καθώς $\delta \psi_\alpha = \delta_0 \psi_\alpha + \partial_\nu \psi_\alpha \delta x^\nu$, έχουμε $\delta \psi_\alpha = \delta_0 \psi_\alpha$ κι ο γεννήτορας των μετασχηματισμών (Εξ. 1.19), παίρνει τη μορφή

$$F[\sigma] = \int_\sigma \pi^\mu_\alpha \delta \psi_\alpha d\sigma_\mu. \tag{1.22}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι για έναν τελεστή που ορίζεται στην επιφάνεια σ, η μεταβολή του κάτω από έναν απειροστό κανονικό μετασχηματισμό δίνεται απ΄ τον μεταθέτη του με το γεννήτορα του μετασχηματισμού

$$\delta_0 \Omega[\sigma] = i \left[F[\sigma], \Omega[\sigma] \right]. \tag{1.23}$$

Επιλέγοντας μια επίπεδη ισόχρονη επιφάνεια, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \delta \psi_\beta(x_0, \mathbf{x}) &= i \int \left[\pi_\alpha(x_0, \mathbf{x}') \delta \psi_\alpha, \psi_\beta(x_0, \mathbf{x}) \right] d^3\mathbf{x}' \\ \delta \pi^\nu_\beta(x_0, \mathbf{x}) &= i \int \left[\pi_\alpha(x_0, \mathbf{x}') \delta \psi_\alpha, \pi^\nu_\beta(x_0, \mathbf{x}) \right] d^3\mathbf{x}'. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C],$$

για να αναλύσουμε τους μεταθέτες στην (1.24), καταλήγουμε στις **ισόχρονες σχέσεις μετάθεσης για τανυστικά (μποζονικά) πεδία**

$$\begin{aligned} \left[\pi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{x}') \right] &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \left[\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{x}') \right] &= \left[\pi_\alpha(\mathbf{x}), \pi_\beta(\mathbf{x}') \right] = 0. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Αν αναλύσουμε τους μεταθέτες στην (1.24) βάσει της ταυτότητας

$$[AB, C] = A\{C, B\} - \{C, A\}B,$$

[5]Η χρονική συνιστώσα της (1.20) ονομάζεται συζηγής ορμή του πεδίου ψ_α.

καταλήγουμε στις **ισόχρονες σχέσεις αντιμετάθεσης για σπινοριακά (φερμιονικά) πεδία**

$$\begin{aligned}\left\{\pi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{x}')\right\} &= -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ \left\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{x}')\right\} &= \left\{\pi_\alpha(\mathbf{x}), \pi_\beta(\mathbf{x}')\right\} = 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Η επιλογή των σωστών σχέσεων σχέσεων μετάθεσης (ή αντιμετάθεσης) για την κβάντωση των πεδίων γίνεται με βάση το θεώρημα σπιν-στατιστικής. Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στις απαιτήσεις της αιτιότητας και της θετικότητας του ενεργειακού φάσματος [8], αλλά μπορεί να συναχθεί κι απ΄ την απαίτηση αναλλοιότητας της Λαγκρανζιανής στο μετασχηματισμό αντιστροφής του χρόνου [2].

1.1.2 Κβάντωση μέσω φορμαλισμού συναρτησιακών ολοκληρωμάτων

Η ιδέα της κβάντωσης μιας θεωρίας πεδίου μέσω συναρτησιακών ολοκληρωμάτων αποτελεί επέκταση της διαδικασίας της 1ης κβάντωσης μέσω των ολοκληρωμάτων διαδρομής, που προτάθηκε αρχικά απ΄ τον Dirac [9] κι αναπτύχθηκε στη συνέχεια απ΄ τον Feynman [10]. Το βασικό αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι ότι το ολικό πλάτος διάδοσης από ένα σημείο x_a σ΄ ένα σημείο x_b δίνεται απ΄ το άθροισμα όλων των επιμέρους δυνατών κλασσικών τροχιών του σωματιδίου, καθεμία απ΄ τις οποίες συμβάλλει στο ολικό πλάτος κατά τον παράγοντα $\mathrm{e}^{iS/\hbar}$, όπου S η δράση που αντιστοιχεί στην κάθε επιμέρους τροχιά[6]. Εισάγοντας το πλάτος μετάβασης απ΄ την κατάσταση $|q_a\rangle$ στη $|q_b\rangle$, έχουμε

$$U(q_a, q_b, T) = \left\langle q_b \left| \mathrm{e}^{-iHT} \right| q_a \right\rangle. \tag{1.27}$$

Διαχωρίζοντας το χρονικό διάστημα T σε N ίσα διαστήματα δt και εισάγοντας στην (1.27) ένα πλήρες σύνολο καταστάσεων μέσω της σχέσης

$$\hat{1} = \prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k |q_k\rangle\langle q_k|, \tag{1.28}$$

καταλήγουμε με ένα γινόμενο από όρους της μορφής $\left\langle q_{k+1} \left| \mathrm{e}^{-iH\delta t} \right| q_k \right\rangle$. Ισχύει όμως ότι

$$\langle q_{k+1}|f(k)|q_k\rangle = f(q_k)\delta(q_k - q_{k+1}). \tag{1.29}$$

Εισάγοντας στην (1.29) ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων ορμής κι επειδή [9] $\langle q|p\rangle = \mathrm{e}^{ipq}$, παίρνουμε

$$\langle q_{k+1}|f(q)|q_k\rangle = \prod_{k=1}^{N-1} \int \frac{dp_k}{2\pi} f(p_k) \exp\left[i \sum_{k=1}^{N-1} p_k(q_{k+1} - q_k)\right]. \tag{1.30}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (1.30), μπορούμε να γράψουμε

$$\left\langle q_{k+1} \left| \mathrm{e}^{-iH\delta t} \right| q_k \right\rangle = \prod_{k=1}^{N-1} \int \frac{dp_k}{2\pi} \exp\left[-i\delta t H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}, p_k\right) + i\sum_{k=1}^{N-1} p_k\left(q_{k+1} - q_k\right)\right]. \tag{1.31}$$

Αντικαθιστώντας την (1.31) στην (1.27) και παίρνοντας τα όρια $\delta t \to 0, N \to \infty$, καταλήγουμε στη σχέση

$$U(q_a, q_b, T) = \int \mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)\mathrm{e}^{i\int_0^T dt L(q,p)}, \tag{1.32}$$

όπου

$$\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t) = \prod_k \frac{dq_k dp_k}{2\pi}.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, αποδεινύεται [12] ότι στην κβαντική θεωρία πεδίου οι συναρτήσεις συσχέτισης υπολογίζονται απ΄ τη σχέση

$$\frac{\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} = \frac{\int \mathcal{D}\phi\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\mathcal{L}\right]}{\int \mathcal{D}\phi\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\mathcal{L}\right]}. \tag{1.33}$$

[6] Για μια πιο αναλυτική παρουσίαση των ολοκληρωμάτων διαδρομής, βλ. [11, 12].

Η ισοδυναμία κανονικού και συναρτησιακού φορμαλισμού

Η προσέγγιση της κβάντωσης μιας θεωρίας πεδίου μέσω του συναρτησιακού φορμαλισμού διαφέρει σημαντικά απ΄ τη διαδικασία της κανονικής κβάντωσης. Το πλεονέκτημα του κανονικού φορμαλισμού είναι η γενικότητα κι η θεωρητική πληρότητα της περιγραφής. Απ΄ την άλλη, ο συναρτησιακός φορμαλισμός, καθώς χρησιμοποιεί τη Λαγκρανζιανή ως βασική ποσότητα για την περιγραφή ενός συστήματος, διατηρεί εκπεφρασμένα όλες τις συμμετρίες της θεωρίας. Επιπλέον η μελέτη μη-αβελιανών πεδιακών θεωριών βαθμίδας φαίνεται να απλοποιείται σημαντικά στα πλαίσια του συναρτησιακού φορμαλισμού (βλ. [12]).
Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.33), (Α΄.15), φαίνεται να υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ των φυσικά παρατηρήσιμων μεγεθών που προκύπτουν μέσω των δύο φορμαλισμών. Μπορεί να αποδειχθεί [13] ότι οι κανόνες για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα σκέδασης που προκύπτουν απ΄ τους δύο φορμαλισμούς είναι ταυτόσημοι. Εφόσον επιπλέον τα στοιχεία του πίνακα σκέδασης συνδέονται με φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη, η παραπάνω πρόταση ισοδυναμεί με το γεγονός ότι οι δύο φορμαλισμοί αποτελούν ισοδύναμες περιγραφές των φυσικών συστημάτων.

1.2 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική

Η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED) είναι η κβαντική θεωρία πεδίου που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των φορτισμένων σωματιδίων (φερμιονίων Dirac). Ο ορισμός της θεωρίας γίνεται με βάση την Λαγκρανζιανή της πυκνότητα. Η Λαγκρανζιανή της QED αποτελείται από 3 κομμάτια [11]:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_I, \tag{1.34}$$

όπου

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi, \tag{1.35}$$

και

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \tag{1.36}$$

Η εισαγωγή των αλληλεπιδράσεων στη θεωρία γίνεται με βάση την ελάσσονα αντικατάσταση[7]

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \tag{1.37}$$

Αντικαθιστώντας την (1.37) στην (1.35), παίρνουμε

$$\mathcal{L}_I = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi. \tag{1.38}$$

1.2.1 Κβάντωση του πεδίου Dirac

Το πεδίο Dirac είναι σπινοριακό, οπότε απ΄ τις σχέσεις (1.26) θα έχουμε

$$\left\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}')\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{1.39}$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\,\psi &= 0 \\ i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m_0\bar{\psi} &= 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Για να μελετήσουμε την εξέλιξη των φερμιονικών καταστάσεων στο χωροχρόνο χρησιμοποιούμε την τεχνική των συναρτήσεων Green [12, 14, 15]. Συγκεκριμένα, εισάγουμε στην εξίσωση Dirac μια εξωτερική σπινοριακή πηγή συζευγμένη στο πεδίο Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\,\psi(x) = J(x). \tag{1.41}$$

[7] Βλ. Ενότητα 1.4.1.

Ο ελεύθερος φερμιονικός διαδότης S_F ορίζεται ως η συνάρτηση Green που ικανοποιεί την Εξ. (1.41)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\, S_F(x-y) = \delta^4(x-y). \tag{1.42}$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier της (1.42), έχουμε

$$(\not{p} - m_0) S_F(p) = 1, \tag{1.43}$$

με

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-ip(x-y)} S_F(p). \tag{1.44}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.43) με $(\not{p} + m_0)$ παίρνουμε

$$\left(p^2 - m_0^2\right) S_F(p) = \not{p} + m_0. \tag{1.45}$$

Αν διαιρέσουμε την (1.45) με $\left(p^2 - m_0^2\right)$, θα προκύψουν πόλοι για τις τιμές $p_0 = \pm E_p$. Απ΄ όλους τους δυνατούς τρόπους παράκαμψης των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο, επιλέγουμε εκείνον που είναι συμβατός με την αρχή της αιτιότητας (που δέχεται δηλαδή συνεισφορές θετικής ενέργειας από το μέλλον και αρνητικής ενέργειας από το παρελθόν). Ορίζουμε έτσι τον ελεύθερο διαδότη Feynman για το φερμιονικό πεδίο

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m_0}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m_0 + i\epsilon}. \tag{1.46}$$

Εισάγοντας τώρα την (1.46) στην (1.44), παίρνουμε

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m_0}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} = -i\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle, \tag{1.47}$$

όπου

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle \equiv \begin{cases} \ \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & \text{για } x^0 > y^0 \\ -\ \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & \text{για } x^0 < y^0 \end{cases} \tag{1.48}$$

1.2.2 Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Η διαδικασία που εφαρμόσαμε παραπάνω για την εύρεση του φερμιονικού διαδότη δεν μπορεί να εφαρμοστεί αυτούσια στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η αιτία βρίσκεται στο γεγονός ότι η συμμετρία βαθμίδας που παρουσιάζει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δημιουργεί μια πλεονασματική φυσική περιγραφή του συστήματος [14]. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι τα κβάντα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι σωματίδια μηδενικής μάζας με σπιν 1, συνεπώς διαθέτουν 2 βαθμούς ελευθερίας. Το διανυσματικό πεδίο A_μ διαθέτει όμως 4 βαθμούς ελευθερίας, συνεπώς προκύπτει ότι μόνο 2 απ΄ αυτούς είναι ανεξάρτητοι. Για να διορθώσουμε αυτόν τον πλεονασμό στην περιγραφή που χρησιμοποιούμε, πρέπει να εισάγουμε έναν όρο επιλογής βαθμίδας στη Λαγκρανζιανή.[8] Ο όρος αυτός είναι της μορφής [14]

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2. \tag{1.49}$$

Με την εισαγωγή του παραπάνω όρου στη Λαγκρανζιανή οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu\right] A_\mu = j^\nu, \tag{1.50}$$

με

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}),$$

[8] Για μια εναλλακτική μέθοδο κβάντωσης του ΗΜ πεδίου με τη μέθοδο της αόριστης μετρικής (Gupta-Bleuler) βλ. [11,15]

όπου ρ και $\mathbf{j}$ η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος αντίστοιχα. Η εξίσωση για τη συνάρτηση Green της (1.50) είναι

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] D^F_{\nu\rho}(x-y) = g^\mu_\rho \delta^4(x-y). \tag{1.51}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και με το φερμιονικό διαδότη, καταλήγουμε τελικά στη

$$D^F_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] \tag{1.52}$$

και

$$D^F_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-ik(x-y)} \frac{-1}{k^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \tag{1.53}$$

1.2.3 Θεωρία Διαταραχών

Το ενδιαφέρον από φυσικής πλευράς βρίσκεται στη μελέτη των καταστάσεων αλληλεπίδρασης των πεδίων. Κατά κανόνα, αν γνωρίζουμε όλες τις κβαντικές καταστάσεις ενός συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε την εξέλιξή του μέσω της Χαμιλτωνιανής που το περιγράφει. Εκτός απ΄ την περίπτωση των ελεύθερων πεδίων κι από μερικά μη ρεαλιστικά μοντέλα αλληλεπιδράσεων, δεν είναι δυνατό να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής για αλληλεπιδρόντα πεδία. Συνεπώς, για να μελετήσουμε ένα σύστημα με αλληλεπιδράσεις, χωρίζουμε τη Χαμιλτωνιανή του ως εξής

$$H = H_0 + H_I, \tag{1.54}$$

όπου H_0 η ελεύθερη Χαμιλτωνιανή (της οποίας οι ιδιοκαταστάσεις είναι γνωστές) και H_I το κομμάτι που περιέχει τις αλληλεπιδράσεις. Για να μπορέσουμε να εκφράσουμε τις αλληλεπιδράσεις συναρτήσει των ελεύθερων πεδίων, πρέπει να καταφύγουμε σε διαταρακτικά αναπτύγματα σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω.
Θεωρούμε μια κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ που εξελίσσεται σύμφωνα με τη Χαμιλτωνιανή H

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = (H_0 + H_I)|\Psi(t)\rangle. \tag{1.55}$$

Απουσία αλληλεπιδράσεων, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$i\frac{d}{dt}|\Psi_0(t)\rangle = H_0|\Psi_0(t)\rangle. \tag{1.56}$$

Ορίζοντας τώρα τους τελεστές χρονικής εξέλιξης $U_0(t)$,$U(t)$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} |\Psi_0(t)\rangle &= U_0(t)|\Psi_0(-\infty)\rangle \equiv U_0(t)|i\rangle \\ |\Psi(t)\rangle &= U_0(t)U(t)U_0^\dagger(t)|\Psi_0(t)\rangle, \end{aligned} \tag{1.57}$$

κι αντικαθιστώντας τις (1.57),(1.56) στην (1.55) καταλήγουμε μετά από πράξεις στη

$$i\frac{dU(t,t_0)}{dt} = H_I(t)U(t,t_0), \tag{1.58}$$

όπου

$$H_I(t) \equiv U_0^\dagger(t)H_I U_0(t) = \mathrm{e}^{H_0(t-t_0)}H_I\mathrm{e}^{-H_0(t-t_0)} \tag{1.59}$$

η αλληλεπιδρώσα Χαμιλτωνιανή στην εικόνα αλληλεπίδρασης.[9] Η Εξ. (1.58) είναι γνωστή ως **εξίσωση Tomonaga-Schwinger** [13]. Θέτοντας $t_0 = -\infty$, η λύση της μπορεί να γραφτεί ως

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_{-\infty}^{t} \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_1 \ldots dt_n [H_I(t_1)\ldots H_I(t_n)] \tag{1.60}$$

[9]Η $H_I(t)$ είναι εκπεφρασμένη μέσω των ελεύθερων πεδίων.

και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του T γινομένου, η (1.60) γράφεται τελικά στη μορφή

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{t} dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\}. \tag{1.61}$$

Για τον υπολογισμό μιας ενεργούς διατομής σε μια διαδικασία αλληλεπίδρασης, πρέπει να ξεκινήσουμε απ΄ το σύνολο των αρχικών καταστάσεων του συστήματος και μέσω του τελεστή χρονικής εξέλιξης να καταλήξουμε σε μια υπέρθεση των εξελιγμένων αρχικών καταστάσεων με ένα σύνολο από επιθυμητές τελικές καταστάσεις. Αυτές οι αρχικές και τελικές καταστάσεις ορίζονται για χρόνους $t \to -\infty$ και $t \to \infty$ ως $|\Psi_{\text{in}}(\alpha)\rangle$,$|\Psi_{\text{out}}(\alpha)\rangle$ και θεωρούνται ασυμπτωτικές, χρονοανεξάρτητες και μη-αλληλεπιδρώσες ιδιοκαταστάσεις της πλήρους Χαμιλτωνιανής H που περιγράφονται απ΄ το σύνολο των κβαντικών αριθμών α. Θεωρώντας αντίστοιχες αρχικές καταστάσεις που περιγράφονται από ένα διαφορετικό σύνολο κβαντικών αριθμών β, ο πίνακας σκέδασης (S-matrix) ορίζεται ως

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle \Psi_{\text{out}}(\beta) | \Psi_{\text{in}}(\alpha) \rangle. \tag{1.62}$$

Αποδεικνύεται [14] ότι

$$\langle \Psi_{\text{out}}(\beta) | \Psi_{\text{in}}(\alpha) \rangle = \lim_{t \to \infty} \langle \beta | U(t) | \alpha \rangle, \tag{1.63}$$

οπότε λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (1.61), έχουμε

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\}, \tag{1.64}$$

το οποίο είναι γνωστό ως **ανάπτυγμα Dyson του πίνακα σκέδασης** [19].

Το θεώρημα Wick

Ορίζοντας τη συναίρεση Wick δυό τελεστών A, B ως [7]

$$\overbrace{A(x)B}(y) \equiv \langle 0 | T\{A(x)B(y)\} | 0 \rangle, \tag{1.65}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \overbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}}_\beta(y) &= iS^F_{\alpha\beta}(x-y), \quad (1.66) \\ \overbrace{A_\mu(x)A}_\nu(y) &= iD^F_{\mu\nu}(x-y). \quad (1.67) \end{aligned}$$

1.3 Επανακανονικοποίηση και Κρίσιμα Φαινόμενα

Όπως είδαμε παραπάνω, ο υπολογισμός παρατηρήσιμων μεγεθών βασίζεται στη θεωρία διαταραχών. Αναλύ-

οντας διάφορες διαδικασίες στην QED σε πρώτη τάξη της σταθεράς ζεύξης α, τα αποτελέσματα που παίρνουμε απ΄ τη θεωρία διαταραχών είναι πεπερασμένα. Παρόλα αυτά, απ΄ τη δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών, αρχίζουν να εμφανίζονται απειρίες στους υπολογισμούς [12, 14, 15]. Η διαδικασία της εξομάλυνσης αυτών των απειριών και της επανέκφρασής τους συναρτήσει των φυσικά μετρήσιμων παραμέτρων της θεωρίας αποτελεί το αντικείμενο της θεωρίας επανακανονικοποίησης. Η διαδικασία επανακανονικοποίησης εμφανίστηκε αρχικά ως ένα υπολογιστικό εργαλείο για τη μεταχείριση των φυσικά μη αποδεκτών απειριών που εμφανίζονταν στη θεωρία διαταραχών. Αργότερα, με την εμφάνιση της θεωρίας της ομάδας επανακανονικοποίησης του Wilson [16], η διαδικασία επανακανονικοποίησης απέκτησε θεωρητική υπόσταση. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε συνοπτικά τη διαδικασία επανακανονικοποίησης και τις συνδετικές έννοιες μεταξύ της ομάδας επανακανονικοποίησης και της θεωρίας των κρίσιμων φαινομένων.[10]

[10] Για μια πιο εκτενή παρουσίαση, βλ. [17, 18].

1.3.1 Μέθοδοι εξομάλυνσης κι επανακανονικοποίηση

Η εμφάνιση των απειριών σε διαγράμματα που περιέχουν βρόγχους, μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσω των 3 διαφορετικών μεθόδων εξομάλυνσης που έχουν προταθεί. (1) Σύμφωνα με την **εξομάλυνση αποκοπής** (cut-off regularization), το άνω όριο ολοκλήρωσης τίθεται ίσο με μια ορμή αποκοπής $\Lambda < \infty$. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν θα είναι πεπερασμένα αλλά εξαρτώμενα απ΄ την ορμή αποκοπής, ενώ η φυσική θεωρία θα αντιστοιχεί στο όριο $\Lambda \to \infty$. (2) Σύμφωνα με την **εξομάλυνση Pauli-Villars**, μπορούμε να εισάγουμε βοηθητικά πεδία που δεν εμφανίζονται στη φυσική θεωρία και τα οποία αναιρούν τις απειρίες που εμφανίζονται στα διαγράμματα βρόγχων. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν εξαρτώνται απ΄ τη μάζα των βοηθητικών πεδίων ενώ οι απειρίες επανεμφανίζονται στο όριο που η μάζα αυτή τείνει στο 0. (3) Σύμφωνα τέλος με τη **διαστατική εξομάλυνση** (dimensional regularization), τα διαγράμματα Feynman υπολογίζονται ως αναλυτικές συναρτήσεις της διάστασης του χωροχρόνου d. Για αρκετά μικρό d, τα ολοκληρώματα συγκλίνουν, ενώ η φυσική θεωρία αντιστοιχεί στο όριο $d \to 4$. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη διαδικασία της εξομάλυνσης αποκοπής.[11]

Η βασική αιτία εμφάνισης απειριών στην κβαντική θεωρία πεδίου είναι ο τοπικός χαρακτήρας της θεωρίας.[12] Καθώς τα πεδία είναι κβαντικά, θα παρουσιάζουν διακυμάνσεις: $\phi(x+a,t) \neq \phi(x,t)$. Θεωρώντας τη μέση τιμή $\bar{\phi}$ του κβαντικού πεδίου ϕ σε μια σφαιρική περιοχή με κέντρο το σημείο x και ακτίνα a, παίρνουμε [17]

$$\left\langle 0 \left| \left(\bar{\phi}(x+a,t) - \phi(x,t)\right)^2 \right| 0 \right\rangle \to \frac{1}{a^4} \stackrel{a\to 0}{\longrightarrow} \infty,$$

δηλαδή οι διακυμάνσεις του πεδίου απειρίζονται σε μικρές κλίμακες. Η εμφάνιση των απειριών αυτών αποτελεί ένδειξη ότι η μικρής κλίμακας δυναμική της θεωρίας παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό της δυναμικής σε μεγάλες κλίμακες. Η βασική ιδέα πίσω απ΄ τη διαδικασία της επανακανονικοποίησης είναι ότι το αποτέλεσμα των καταστάσεων πολύ υψηλής ενέργειας (δυναμική μικρής κλίμακας) μπορεί να αναπαραχθεί από ένα νέο σύνολο τοπικών αλληλεπιδράσεων. Έτσι, δεχόμενοι ότι η QED είναι μια χαμηλοενεργειακή προσέγγιση κάποιας ευρύτερης φυσικής θεωρίας, εισάγουμε τη Λαγκρανζιανή [17]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Lambda &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - e_\Lambda A\!\!\!/ - m_\Lambda)\psi - \frac{1}{2}(F^{\mu\nu})^2 \\ &+ \frac{e_\Lambda m_\Lambda c_1}{\Lambda^2}\bar{\psi}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\psi + \frac{e_\Lambda c_2}{\Lambda^2}\bar{\psi}i\partial_\mu F^{\mu\nu}\gamma_\nu\psi + \frac{d}{\Lambda^2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + \dots\end{aligned}$$

Οι μη-επανακανονικοποιήσιμες αλληλεπιδράσεις που εμφανίζονται στην παραπάνω έκφραση υποβαθμίζονται από τους όρους $(p/\Lambda)^2$ και συνεπώς οι επίδρασή τους σε κλίμακες $p \ll \Lambda$ είναι αμελητέα.[13] Η εμφάνιση διορθώσεων στις επανακανονικοποιήσιμες αλληλεπιδράσεις αποτελεί, σύμφωνα με την παραπάνω έκφραση, ένδειξη μιας νέας δυναμικής σε υψηλές ενέργειες.[14] Για την QED γνωρίζουμε ότι η τιμή της ανώμαλης μαγνητικής ροπής του ηλεκτρονίου υπολογίζεται απ΄ τις επανακανονικοποιήσιμες αλληλεπιδράσεις με ακρίβεια 12 δεκαδικών ψηφίων. Ένας μη-επανακανονικοποιήσιμος όρος της μορφής $\bar{\psi}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\psi$ θα εισήγαγε μια διόρθωση της τάξης $(m_e/\Lambda)^2$, οπότε

$$\frac{m_e^2}{\Lambda^2} < 10^{-12}.$$

Αναμένουμε δηλαδή ότι το κατώφλι ενέργειας για την εμφάνιση νέας φυσικής στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις είναι της τάξης $\Lambda_{\mathrm{QED}} \gtrsim 1\mathrm{TeV}$. Το αποτέλεσμα της παράλειψης των καταστάσεων υψηλής

[11] Οι υπόλοιπες μέθοδοι εξομάλυνσης αναλύονται εκτενώς στο [12].

[12] Στο [19] ο Dyson προτείνει ότι οι απειρίες στην κβαντική θεωρία πεδίου εμφανίζονται λόγω της παραβίασης των σχέσεων αβεβαιότητας του Heisenberg στα πλαίσια μιας εξειδανικευμένης διαδικασίας μέτρησης, στην οποία οι θέσεις των σωματιδίων είναι γνωστές με άπειρη ακρίβεια. Για την απόδειξη της πρότασης αυτής, βλ. [20].

[13] Η εισαγωγή της ορμής αποκοπής Λ μπορεί να ειδωθεί αλλιώς ως ένας περιορισμός στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

[14] Σημειώνουμε ότι μη-επανακανονικοποιήσιμες αλληλεπιδράσεις μπορεί να είναι φυσικά παρατηρήσιμες σε χαμηλές ενέργειες, αν επιτρέπουν διαδικασίες που απαγορεύονται από τις επανακανονικοποιήσιμες αλληλεπιδράσεις (π.χ. η αλληλεπίδραση $G_F(\bar{\psi}\psi)^2$ στη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων). Βλ. [21].

ενέργειας ανταναχλάται επίσης στην αλλαγή της τιμής των σταθερών ζεύξης όπως φαίνεται παρακάτω. Ορίζοντας τη γυμνή Λαγκρανζιανή της QED ως

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - e_0 A\!\!\!/ - m_0)\psi - \frac{1}{2}(F^{\mu\nu})^2, \tag{1.68}$$

πρέπει να εισάγουμε μια ορμή αποκοπής Λ_0. Αποδεικνύεται [17] ότι η επανακανονικοποιημένη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_\Lambda = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - e_\Lambda A\!\!\!/ - m_\Lambda)\psi - \frac{1}{2}(F^{\mu\nu})^2, \tag{1.69}$$

με

$$e_\Lambda = e_0\left(1 + c_0\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)\right), \tag{1.70}$$

$$m_\Lambda = m_0\left(1 + \tilde{c}_0\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)\right), \tag{1.71}$$

όπου c_0, $\tilde{c}_0$ αδιάστατες σταθερές που εξαρτώνται μόνο απ΄ το λόγο $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$, δίνει (μέχρι τάξης $\mathcal{O}(1/\Lambda^2)$) τα ίδια αποτελέσματα με την (1.68) υπολογιζόμενη με ορμή αποκοπής Λ_0. Συνεπώς το αποτέλεσμα της αλλαγής της ορμής αποκοπής Λ είναι η αλλαγή της τιμής της γυμνής σταθεράς ζεύξης και της γυμνής μάζας κατά τέτοιο τρόπο ώστε η συμπεριφορά της θεωρίας σε χαμηλές ενέργειες να παραμένει αναλλοίωτη. Όπως φαίνεται απ΄ τις παραπάνω σχέσεις, η διαδικασία επανακανονικοποίησης έχει άμεσες φυσικές συνέπειες, όπως πχ. η κίνηση (running) της σταθεράς ζεύξης ή η τροποποίηση της αλληλεπίδρασης Coulomb [12,14].

1.3.2 Η ομάδα επανακανονικοποίησης κι η ανάδυση κρίσιμης συμπεριφοράς

Η θεωρία της ομάδας επανακανονικοποίησης του Wilson είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις έννοιες της μετάβασης φάσης και των κρίσιμων φαινομένων που εμφανίζονται στη στατιστική φυσική. Ο όρος μετάβαση φάσης περιγράφει το φαινόμενο κατά το οποίο διαδοχικές ποσοτικές μεταβολές μιας παραμέτρου οδηγούν σε μια ποιοτική μεταβολή του συστήματος. Έχει επιβεβαιωθεί ότι πολλές μεταβάσεις φάσης συνδέονται με τη θραύση (ή αποκατάσταση) των συμμετριών που διαθέτει ένα φυσικό σύστημα. Σύμφωνα με τη θεωρία Landau, μπορούμε να ορίσουμε μια παράμετρο η, τέτοια ώστε $\eta = 0$ στη συμμετρική φάση και $\eta \neq 0$ στη μη συμμετρική. Η παράμετρος αυτή ονομάζεται **παράμετρος τάξης** κι αποτελεί ένα μέτρο της συμμετρίας του συστήματος.[15] Η παράμετρος τάξης, αποτελεί έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας, ο οποίος είναι απαραίτητος για την πλήρη περιγραφή του συστήματος στη μη συμμετρική φάση. Το σημείο στο οποίο $\eta \neq 0$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** και ορίζει την κλίμακα στην οποία το μήκος συσχέτισης $\xi \to \infty$, δηλ. η μικροσκοπική δυναμική παύει να παίζει ρόλο στην περιγραφή του συστήματος.
Η συνάρτηση συσχέτισης $G(\mathbf{r}) = \langle\psi(\mathbf{0})\psi(\mathbf{r})\rangle$ αποτελεί ένα μέτρο της επίδρασης των κβαντικών διακυμάνσεων του πεδίου ψ στο σημείο $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ σε απόσταση $r = |\mathbf{r}|$. Στην περιοχή όμως του κρίσιμου σημείου, το μήκος συσχέτισης των κβαντικών διακυμάνσεων τείνει στο άπειρο, οπότε αποδεικνύεται [18] οτι

$$\lim_{r\to 0} G_c(\mathbf{r}) \approx \frac{D}{r^{d-2-\eta}}. \tag{1.72}$$

Η κλασσική θεωρία προβλέπει ότι $\eta = 0$ αλλά στην κβαντική θεωρία πεδίου ισχύει γενικά $\eta \neq 0$. Η περίπτωση $\eta = 0$ αντιστοιχεί σε άμαζα μη-αλληλεπιδρόντα πεδία. Η διάσταση $d-2$ ονομάζεται **κανονική διάσταση** του G_c ενώ η η ονομάζεται **ανώμαλη διάσταση**. Εισάγοντας έναν μετασχηματισμό της μορφής $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = b\mathbf{r}$, η (1.72) γίνεται

$$G_c(\mathbf{r}) \to G'_c(b\mathbf{r}) = b^{2\omega}\langle\psi(\mathbf{0})\psi(\mathbf{r})\rangle \approx b^{2\omega}\frac{D}{b^{d-2-\eta}r^{d-2-\eta}}, \quad \text{για} \quad r \to \infty. \tag{1.73}$$

[15] Σημειώνουμε ότι η θεωρία Landau δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη της παραμέτρου τάξης για όλα τα φυσικά συστήματα. Στις μεταβάσεις φάσεις που θα μας απασχολήσουν στην εργασία αυτή, θα δούμε ότι υπάρχει μια καλώς ορισμένη παράμετρος τάξης.

Παρατηρούμε ότι αν $\omega = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta)$, η (1.73) μεταπίπτει στην (1.72). Δηλαδή η συνάρτηση συσχέτισης $G_c(\mathbf{r})$ είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας. Είναι επίσης γενικό χαρακτηριστικό της κρίσιμης συμπεριφοράς, ότι στην περιοχή του κρίσιμου σημείου, οι διάφορες παράμετροι του φυσικού συστήματος παρουσιάζουν συγκεκριμένη ασυμπτωτική συμπεριφορά, η οποία περιγράφεται από χαρακτηριστικούς **κρίσιμους εκθέτες**.

Θεωρούμε τώρα ότι ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από μια Χαμιλτωνιανή $\bar{\mathcal{H}}^{(0)} = \bar{\mathcal{H}}^{(0)}[t, h_1, \ldots h_i, \ldots]$, όπου τα $(t, h_1, \ldots h_i, \ldots)$ είναι διάφορα θερμοδυναμικά πεδία. Η ιδέα του Wilson ήταν να θεωρήσει ότι αυτή η συγκεκριμένη Χαμιλτωνιανή ορίζει έναν υποχώρο μες στον ευρύτερο χώρο $\mathbb{H}$ των δυνατών Χαμιλτωνιανών. Η διαδικασία επανακανονικοποίησης που είδαμε παραπάνω, μπορεί να περιγραφεί με έναν μετασχηματισμό $\mathbb{R}_B$ που θα απεικονίζει τον αρχικό υποχώρο $\bar{\mathcal{H}}^{(0)}$ σ' έναν νέο υποχώρο $\bar{\mathcal{H}}^{(1)}$, όπου οι παράμετροι της Χαμιλτωνιανής έχουν επανακανονικοποιηθεί.[16] Το σύνολο των μετασχηματισμών $\{\mathbb{R}_B\}$ ονομάζεται **ομάδα επανακανονικοποίησης**.[17] Γράφοντας συμβολικά

$$\mathbb{R}_B[\bar{\mathcal{H}}^{(i)}] = \bar{\mathcal{H}}^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.74}$$

μπορούμε να δούμε ότι με τη δράση του τελεστή $\mathbb{R}_B$, κάθε σημείο του υποχώρου $\bar{\mathcal{H}}^{(i)}$ (που αντιστοιχεί σε μια παράμετρο του φυσικού συστήματος) διαγράφει μια τροχιά στο χώρο $\mathbb{H}$. Επιπλέον το κρίσιμο σημείο

ΣΧΗΜΑ 1.1: Απεικόνιση της ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης στο χώρο των Χαμιλτωνιανών $\mathbb{H}$. Ο γεωμετρικός τόπος $l = 0$ αντιστοιχεί στο χώρο των γυμνών Χαμιλτωνιανών $\bar{\mathcal{H}}^{(0)}$. Η έντονη γραμμή αντιστοιχεί στην κρίσιμη ροή, η οποία καταλήγει στο σημείο διακλάδωσης $\star$ (σταθερό σημείο της ροής). Η τομή της κρίσιμης ροής με τον γεωμετρικό τόπο $l = 0$ αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο του αρχικού συστήματος, ενώ τα $\oplus$ και $\ominus$ αντιστοιχούν σε ασυμπτωτικές καταστάσεις υψηλής και χαμηλής θερμοκρασίας αντίστοιχα [18].

του αρχικού συστήματος θα απεικονιστεί σ' ένα κρίσιμο σημείο του επανακανονικοποιημένου συστήματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, όσο η παράμετρος ροής (επανακανονικοποίησης) είναι μικρή ($l \simeq 0$) δύο σημεία που βρίσκονταν αρχικά κοντά θα παραμείνουν κοντά. Καθώς το l μεγαλώνει, υπάρχει ένα σημείο, στο οποίο οι ροές διακλαδώνονται κι εξελίσσονται σε εντελώς διαφορετικά δυναμικά συστήματα (μετάβαση φάσης). Αυτό το **σημείο διακλάδωσης** βρίσκεται πάνω στην **κρίσιμη τροχιά** που διαγράφουν τα κρίσιμα σημεία των συστημάτων $\bar{\mathcal{H}}^{(i)}$ υπό τη δράση του τελεστή $\mathbb{R}_B$. Το σημείο διακλάδωσης ορίζεται απ' τη σχέση

$$\mathbb{R}_B[\bar{\mathcal{H}}^{(*)}] = \bar{\mathcal{H}}^{(*)} \tag{1.75}$$

και στη γλώσσα της θεωρίας Wilson ονομάζεται **σταθερό σημείο** (fixed point) της ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης. Η σπουδαιότητα της έννοιας του σταθερού σημείου φαίνεται στο Σχήμα 1.2: φυ-

ΣΧΗΜΑ 1.2: Απεικόνιση του χώρου $\mathbb{H}$. Τα $(a), (b), \ldots$ αναπαριστούν τις αρχικές πολλαπλότητες (υποχώρους $\bar{\mathcal{H}}_i^{(0)}$) που αντιστοιχούν σε διαφορετικά φυσικά συστήματα. Τα διακεκομένα βέλη αναπαριστούν τις ροές των μη-σχετικών τελεστών, ενώ τα έντονα βέλη αναπαριστούν τις κρίσιμες ροές που τερματίζουν στο σταθερό σημείο $\bar{\mathcal{H}}^{(*)}$. Ο πλήρης χώρος θα περιέχει γενικά κι άλλα μη-τετριμμένα σταθερά σημεία [18].

σικά συστήματα με διαφορετική δυναμική που ανήκουν στην περιοχή έλξης του $\bar{\mathcal{H}}^{(*)}$ εμφανίζουν την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά (περιγράφονται απ' τους ίδιους κρίσιμους εκθέτες) στην περιοχή του σταθερού

[16] Για το πώς κατασκευάζεται αυτός ο μετασχηματισμός βλ. [12, 16, 18]

[17] Στην πραγματικότητα το σύνολο $\{\mathbb{R}_B\}$ αποτελεί ημι-ομάδα καθώς ο μετασχηματισμός $\mathbb{R}_B$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

σημείου. Λέμε τότε ότι το σημείο $\bar{\mathcal{H}}^{(*)}$ ορίζει μια **κλάση οικουμενικότητας** (universality class) της κρίσιμης συμπεριφοράς που διέπει όλα τα συστήματα των οποίων τα κρίσιμα σημεία απεικονίζονται στο $\bar{\mathcal{H}}^{(*)}$. Τα σταθερά σημεία μπορεί να είναι τετριμμένα, δηλ. να ανιστοιχούν στην περίπτωση ασυμπτωτικά ελεύθερων πεδίων, ή μη-τετριμμένα. Επιπλέον διαχωρίζονται σε **υπέρυθρα ευσταθή** (infrared stable) αν παρουσιάζονται σε χαμηλές ενέργειες και **υπεριώδη ευσταθή** (ultraviolet stable) αν παρουσιάζονται σε υψηλές ενέργειες. Σημειώνουμε επίσης ότι οι διάφοροι τελεστές διακρίνονται σε **σχετικούς** (relevant) και **μη-σχετικούς** (irrelevant) αν οι συντελεστές τους είναι γνησίως αύξοντες ή γνησίως φθίνοντες αντίστοιχα καθώς $\Lambda \to \infty$. Οι τελεστές που δεν είναι γνησίως αύξοντες ή γνησίως φθίνοντες ονομάζονται **περιθωριακοί** (marginal). Η διάκριση αυτή μπορεί να γίνει και βάσει της διάστασης μάζας των συντελεστών. Συγκεκριμένα, για τους σχετικούς (μη-σχετικούς) τελεστές οι συντελεστές έχουν διάσταση μάζας μικρότερη (αντίστοιχα μεγαλύτερη) απ΄ την κανονική διάσταση, ενώ οι συντελεστές των περιθωριακών τελεστών είναι αδιάστατοι. Σημειώνουμε ότι ισχυρές αλληλεπιδράσεις μπορούν να αλλάξουν τη διάσταση ορισμένων τελεστών, μετατρέποντας τους μη-σχετικούς τελεστές σε περιθωριακούς ή σχετικούς και αντίστροφα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **διαστατική μετάλλαξη** (dimensional transmutation) [23].
Σύμφωνα με την παραπάνω ορολογία, παρατηρούμε στο Σχήμα 1.2 ότι οι ροές που δεν καταλήγουν στο σταθερό σημείο σχετίζονται με μη-σχετικούς τελεστές. Η εμφάνιση της οικουμενικότητας εξηγείται συνεπώς απ΄ το γεγονός ότι η μακροσκοπική συμπεριφορά των φυσικών συστημάτων περιγράφεται από σχετικούς τελεστές, ενώ οι μη-σχετικοί τελεστές που σχετίζονται με τη μικροσκοπική δυναμική είναι αμελητέοι στην περιοχή του κρίσιμου σημείου. Σημειώνουμε επίσης ότι οι σχετικοί κι οι περιθωριακοί τελεστές αντιστοιχούν σε υπερ-επαναχανονικοποιήσιμες κι επαναχανονικοποιήσιμες αλληλεπιδράσεις αντίστοιχα, ενώ οι μη-σχετικοί αντιστοιχούν σε μη-επαναχανονικοποιήσιμες[18].

1.4 Συμμετρίες στην κβαντική θεωρία πεδίου

Όπως στην κλασσική θεωρία, έτσι και στην κβαντική θεωρία πεδίου οι συμμετρίες[19] παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο. Είναι γνωστό ότι η κατασκευή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας βασίζεται εξ΄ ολοκλήρου στις συμμετρίες που διαθέτει μια φυσική θεωρία. Επιπλέον, το θεώρημα της Noether, μας εξασφαλίζει ότι αν γνωρίζουμε τις διατηρούμενες ποσότητες ενός συστήματος, μπορούμε να βρούμε τις συμμετρίες που διαθέτει και συνεπώς να το περιγράψουμε θεωρητικά.
Οι συμμετρίες χωρίζονται σε χωροχρονικές και εσωτερικές. Στην πρώτη περίπτωση οι μετασχηματισμοί συμμετρίας συνδέεουν πεδία σε διαφορετικά χωροχρονικά σημεία (πχ μετασχηματισμοί Poincaré), ενώ στη δεύτερη συσχετίζουν διαφορετικά πεδία (οι διαφορετικές συνιστώσες του ίδιου πεδίου) στο ίδιο χωροχρονικό σημείο (πχ μετασχηματισμοί βαθμίδας). Επίσης οι συμμετρίες διακρίνονται σε παγκόσμιες ή τοπικές, ανάλογα με το αν οι μετασχηματισμοί διαφέρουν από σημείο σε σημείο, και σε διακριτές και συνεχείς, ανάλογα με το αν οι μετασχηματισμοί είναι διακριτοί ή συνεχείς.
Οι αβελιανές πεδιακές θεωρίας βαθμίδας που θα μας απασχολήσουν στην εργασία αυτή, χαρακτηρίζονται απ΄ την αναλλοιώτητά τους σε τοπικούς (αβελιανούς) μετασχηματισμούς βαθμίδας. Εκτός αυτού, μια τέτοια φυσική θεωρία θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς Poincaré και στους μετασχηματισμούς $\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{T}$ και τους συνδυασμούς τους. Επιπλέον στο όριο που τα στοιχειώδη φερμιονικά πεδία θεωρούνται άμαζα, οι θεωρίες αυτές διαθέτουν μια επιπλέον συμμετρία, η οποία ονομάζεται χειραλική συμμετρία.

[18] Αυτό ερμηνεύει το γεγονός ότι σε μακροσκοπικές κλίμακες η φύση φαίνεται να περιγράφεται από επαναχανονικοποιήσιμες θεωρίες.
[19] Με την έννοια συμμετρία εννοούμε την ιδιότητα ενός φυσικού συστήματος να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από κάποιον μετασχηματισμό.

1.4.1 Αναλλοιότητα βαθμίδας

Οι θεωρίες στις οποίες οι μετασχηματισμοί συμμετρίας ισχύουν τόσο παγκόσμια όσο και τοπικά ονομάζονται θεωρίες βαθμίδας. Ειδοποιό χαρακτηριστικό των θεωριών βαθμίδας είναι ότι η απαίτηση αναλλοιότητας σε τοπικούς μετασχηματισμούς συμμετρίας θέτει περιορισμούς στη δυναμική του συστήματος. Έτσι, η δυναμική των θεωριών βαθμίδας καθορίζεται απ΄ τις συμμετρίες τις οποίες διαθέτουν μέσω της **αρχής βαθμίδας** (gauge principle).
Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, μπορούμε να ορίσουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο μέσω του τετραδυναμικού $A^\mu = (V, \mathbf{A})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, &(1.76)\\ \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. &(1.77) \end{aligned}$$

Η αναλλοιότητα βαθμίδας της θεωρίας πηγάζει απ΄ το γεγονός ότι τα δυναμικά $V, \mathbf{A}$ δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένα. Πράγματι, εισάγοντας το μετασχηματισμό βαθμίδας

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \tag{1.78}$$

μπορούμε να δούμε ότι οι (1.76), (1.77) παραμένουν αναλλοίωτες. Γνωρίζουμε επίσης ότι η εξίσωση

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{1.79}$$

που περιγράφει τη δυναμική των Η/Μ αλληλεπιδράσεων εμπεριέχει την εξίσωση συνέχειας $\partial_\mu j^\mu = 0$, δηλ. η δυναμική της θεωρίας συνδέεται άμεσα με έναν τοπικό νόμο διατήρησης (διατήρηση φορτίου). Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι ο (1.78) αφήνει αναλλοίωτη την Εξ. (1.79), άρα συμπεραίνουμε ότι πρέπει να υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ αναλλοιότητας στο μετασχηματισμό βαθμίδας και δυναμικής. Γράφοντας την (1.78) στην αναλυτική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \\ V &\to V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.80}$$

συνάγουμε ότι μια τοπική μεταβολή του ηλεκτροστατικού δυναμικού V μπορεί να αντισταθμιστεί από μια τοπική μεταβολή στο διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ [24]. Επίσης γνωρίζουμε [25] ότι η διατήρηση του φορτίου στην ηλεκτροδυναμική συνδέεται με την αναλλοιότητα της θεωρίας στη μεταβολή του ηλεκτροστατικού δυναμικού που περιγράφεται από έναν παγκόσμιο μετασχηματισμό της μορφής $V \to V' = V + \alpha$, όπου α σταθερά. Συνεπώς, συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση του μαγνητικού πεδίου, η αρχική παγκόσμια συμμετρία μεταβολής του ηλεκτροστατικού δυναμικού μετατράπηκε σε μια τοπική συμμετρία. Αντίστροφα, η γενίκευση μιας παγκόσμιας συμμετρίας σε τοπική απαιτεί την εισαγωγή νέων πεδίων (**πεδίων βαθμίδας**) των οποίων η δυναμική είναι καθορισμένη. Αυτή είναι η **αρχή βαθμίδας**.
Προχωρώντας τώρα στο κβαντικό επίπεδο, θεωρούμε την εξίσωση Schrödinger για ένα ελεύθερο σωματίδιο:

$$-\frac{i}{2m}\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \tag{1.81}$$

Για να είναι η (1.81) αναλλοίωτη κάτω από έναν τοπικό μετασχηματισμό της μορφής

$$\psi(\mathbf{x}, t) \to \psi'(\mathbf{x}, t) = \mathrm{e}^{i\alpha(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t), \tag{1.82}$$

θα πρέπει οι παράγωγοι στην (1.81) να αντικατασταθούν με τις συναλλοίωτες παραγώγους που ορίζονται απ΄ τη σχέση

$$D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu, \tag{1.83}$$

και το A^μ πρέπει να ικανοποιεί την (1.78). Βλέπουμε δηλαδή ότι η αναλλοιότητα βαθμίδας καθορίζει τη δυναμική των αλληλεπιδράσεων της θεωρίας. Είναι επίσης θεμελιώδες χαρακτηριστικό των θεωριών βαθμίδας ότι τα πεδία βαθμίδας είναι άμαζα. Η προσθήκη ενός όρου της μορφής $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ στη Λαγκρανζιανή (1.34) θα παραβίαζε την αναλλοιότητα στον μετασχηματισμό βαθμίδας. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αμαζότητα των μποζονίων βαθμίδας είναι άμεση απόρροια της αναλλοιότητας βαθμίδας. Σημειώνουμε ότι οι μετασχηματισμοί της μορφής (1.82) είναι μονοπαραμετρικοί και μοναδιακοί και περιγράφονται απ' την αβελιανή ομάδα $U(1)$.[20]

Οι ταυτότητες Ward-Green-Takahashi

Οι ταυτότητες Ward-Green-Takahashi [26–28] είναι άμεση συνέπεια της αναλλοιότητας βαθμίδας στην κβαντική θεωρία πεδίου. Η απόδειξη των ταυτοτήτων αυτών θα γίνει στον κανονικό φορμαλισμό [11,12].[21] Γνωρίζουμε ότι η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής (1.34) στους μετασχηματισμούς της μορφής $\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{i\alpha}\psi$ οδηγεί μέσω του θεωρήματος της Noether στη διατήρηση του ρεύματος

$$j_\mu(x) = eN\{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\}. \tag{1.84}$$

Μπορούμε γενικά να γράψουμε

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\mu \langle 0|T\{j_\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\ldots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_n)A_{\mu_1}(z_1)\ldots A_{\mu_p}(z_p)\}|0\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle 0\left|T\left\{\left([j_0(x),\psi(x_i)]\delta(x^0-x_i^0)\bar{\psi}(y_i) + \psi(x_i)[j_0(x),\bar{\psi}(y_i)]\delta(x^0-y_i^0)\right)\right.\right.\right. \times \\
&\qquad\qquad \left.\left.\left.\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\ldots\psi(x_i)\bar{\psi}(y_i)\ldots A_{\mu_p}(z_p)\right\}\right|0\right\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^{p} \left\langle 0\left|T\left\{\psi(x_1)\ldots\bar{\psi}(y_n)A_{p_1}(z_1)\ldots[j_0(x),A_{\mu_j}(z_j)]\delta(x^0-z_j^0)\ldots A_{\mu_p}(z_p)\right\}\right|0\right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Στην παραπάνω σχέση οι όροι $\psi(x_i)\bar{\psi}(y_i)$ παραλλείπονται. Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
\left[j_0(x),\psi(x')\right]\delta(x^0-x'^0) &= -e\psi(x)\delta^{(4)}(x-x') \\
\left[j_0(x),\bar{\psi}(x')\right]\delta(x^0-x'^0) &= e\bar{\psi}(x)\delta^{(4)}(x-x') \\
\left[j_0(x),A_\mu(x')\right]\delta(x^0-x'^0) &= 0
\end{aligned} \tag{1.86}$$

στην (1.85), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\partial_x^\mu \langle 0|T\{j_\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\ldots A_{\mu_p}(z_p)\}|0\rangle &= e\langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\ldots A_{\mu_p}(z_p)\}|0\rangle \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{n}\left[\delta^{(4)}(x-y_i) - \delta^{(4)}(x-x_i)\right].
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Η (1.87) ορίζει τις γενικευμένες ταυτότητες WGT. Ειδική περίπτωση της παραπάνω είναι η ταυτότητα Ward [11, 12]

$$p_\mu \Gamma^\mu(p+k,p) = S_F^{-1}(p+k) - S_F^{-1}(p). \tag{1.88}$$

1.4.2 Χειραλική συμμετρία

Θεωρούμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων Dirac, $\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha})$, με

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{1.89}$$

[20] Για περαιτέρω συζήτηση των αβελιανών θεωριών βαθμίδας, βλ. [21].

[21] Για την εξαγωγή των ταυτοτήτων WGT μέσω συναρτησιακού φορμαλισμού, βλ. [29].

Στην αναπαράσταση Weyl, η εξίσωση Dirac

$$(\not{p} - m)\omega = 0, \tag{1.90}$$

με

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{1.91}$$

παίρνει τη μορφή

$$E\phi = \vec{\sigma}\vec{p} + m\chi \tag{1.92}$$
$$E\chi = -\vec{\sigma}\vec{p} + m\phi. \tag{1.93}$$

Στο όριο $m \to 0$, ισχύει $E \to |\vec{p}|$, οπότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$\vec{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\tilde{\phi} = \tilde{\phi} \tag{1.94}$$
$$\vec{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\tilde{\chi} = -\tilde{\chi}, \tag{1.95}$$

όπου $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.[22] Ορίζοντας τον πίνακα $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, έχουμε ότι στην αναπαράσταση Weyl

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.96}$$

Στο όριο $m \to 0$ ισχύει

$$[\vec{\sigma}\vec{p}, \gamma_5] = 0, \tag{1.97}$$

το οποίο σημαίνει ότι οι άμαζες φερμιονικές καταστάσεις μπορούν να ταξινομιθούν απ΄ τις ιδιοτιμές του πίνακα γ_5. Η ιδιοτιμή του γ_5 ονομάζεται **χειραλικότητα**, οπότε στο όριο $m \to 0$, τα φερμιόνια έχουν συγκεκριμένη τιμή χειραλικότητας και οι κυματοσυναρτήσεις τους είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς της μορφής[23]

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{-i\beta\gamma_5}\psi. \tag{1.98}$$

Το διατηρούμενο ρεύμα Noether που αντιστοιχεί στον παραπάνω μετασχηματισμό είναι

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{1.99}$$

και το διατηρούμενο φορτίο δίνεται απ΄ τον τελεστή[24]

$$Q_5 = \int d^3x \psi^\dagger \gamma_5 \psi. \tag{1.100}$$

Αποδεικνύεται επίσης [22] ότι ο τελεστής Q_5 είναι ψευδοβαθμωτός, δηλαδή αλλάζει πρόσημο κάτω απ΄ τον μετασχηματισμό της ομοτιμίας και κατά συνέπεια ο Q_5 αλλάζει την ομοτιμία των καταστάσεων στις οποίες δρα:

$$PQ_5P^{-1} = -Q_5. \tag{1.101}$$

Επίσης, ο Q_5 ως τελεστής συμμετρίας του συστήματος θα μετατίθεται με τη Χαμιλτωνιανή:

$$HQ_5|\psi\rangle = Q_5H|\psi\rangle = EQ_5|\psi\rangle, \tag{1.102}$$

δηλαδή στο όριο $m \to 0$ για κάθε κατάσταση $|\psi\rangle$ με ιδιοενέργεια E θα υπάρχει μια κατάσταση $Q_5|\psi\rangle$ με την ίδια ιδιοενέργεια και αντίθετη ομοτιμία. Συμπεραίνουμε ότι η χειραλική συμμετρία συνεπάγεται την ύπαρξη **διπλετών ομοτιμίας** στο ενεργειακό φάσμα.

[22] Η αποσύζευξη των σπινόρων $\tilde{\phi}, \tilde{\chi}$ στο όριο $m \to 0$, αντανακλά το γεγονός ότι η ελικότητα των άμαζων σωματιδίων είναι αναλλοίωτη κάτω απ΄ τους μετασχηματισμούς Lorentz.

[23] Η ομάδα των μετασχηματισμών (1.98) συμβολίζεται ως $U(1)_5$.

[24] Υπενθυμίζουμε ότι $Q = \int d^3x j^0(x)$.

1.5 Θραύση συμμετρίας

Σύμφωνα με την ανάλυση της Ενότητας 1.4.2, θεωρώντας την QED στο χειραλικό όριο $m \to 0$, θα αναμέναμε την εμφάνιση διπλετών ομοτιμίας στο φερμιονικό φάσμα. Το γεγονός ότι η ύπαρξη αυτών των διπλετών έχει αποκλειστεί απ΄ τα πειραματικά δεδομένα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η χειραλική συμμετρία πρέπει να παραβιάζεται με κάποιον τρόπο. Ένας τέτοιος τρόπος είναι η ρητή θραύση της συμμετρίας από τον όρο μάζας του φερμιονικού πεδίου. Κάτι τέτοιο φαίνεται να συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα, καθώς τα στοιχειώδη φερμιονικά πεδία εμφανίζονται στο πείραμα ως μαζικά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση στην οποία τα στοιχειώδη φερμιονικά πεδία παραμένουν άμαζα, αλλά η χειραλική συμμετρία παραβιάζεται είτε αυθόρμητα είτε δυναμικά[25].

1.5.1 Αυθόρμητη θραύση συμμετρίας: οι μηχανισμοί Goldstone και Higgs

Θεωρούμε δύο καταστάσεις $|A\rangle$ και $|B\rangle$:

$$|A\rangle = \phi_A^\dagger|0\rangle \qquad |B\rangle = \phi_B^\dagger|0\rangle, \tag{1.103}$$

όπου τα πεδία $\phi_A^\dagger, \phi_B^\dagger$ ικανοποιούν τη σχέση

$$[Q, \phi_A^\dagger] = \phi_B^\dagger \tag{1.104}$$

και $[Q, H] = 0$. Για να είναι οι $|A\rangle, |B\rangle$ εκφυλισμένες πρέπει $E_A = E_B$. Έχουμε

$$E_B|B\rangle = H|B\rangle = H\phi_B^\dagger|0\rangle = H[Q, \phi_A^\dagger]|0\rangle. \tag{1.105}$$

Αν

$$Q|0\rangle = 0, \tag{1.106}$$

(δηλ. η κατάσταση του κενού είναι αναλλοίωτη κάτω απ΄ το μετασχηματισμό συμμετρίας) η (1.105) δίνει $E_B|B\rangle = E_A|B\rangle$, οπότε στο ενεργειακό φάσμα θα εμφανίζονται ενεργειακά εκφυλισμένες πολλαπλέτες. Η *συνθήκη για την αυθόρμητη θραύση της συμμετρίας* είναι[26]

$$Q|0\rangle \neq 0, \tag{1.107}$$

δηλ. *η κατάσταση του κενού δεν παραμένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς συμμετρίας*. Στην περίπτωση αυτή δεν εμφανίζονται πολλαπλέτες στο ενεργειακό φάσμα.

Ο μηχανισμός Goldstone

Τα πιο απλά μοντέλα που παρουσιάζουν αυθόρμητη θραύση συμμετρίας είναι τα λεγόμενα μοντέλα Goldstone. Εξετάζουμε εδώ το 2ο μοντέλο Goldstone στο οποίο η συμμετρία είναι συνεχής.[27]. Θεωρούμε τη Λαγκρανζιανη

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi), \tag{1.108}$$

όπου

$$V(\phi^\dagger\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{3!}(\phi^\dagger\phi)^2. \tag{1.109}$$

[25]Στην περίπτωση της ρητής παραβίασης της χειραλικής συμμετρίας, οι φερμιονικές μάζες αποτελούν ελεύθερες παραμέτρους. Στην περίπτωση της δυναμικής θραύσης της συμμετρίας, οι φερμιονικές μάζες προκύπτουν απ΄ τη δυναμική της θεωρίας κι οι ελεύθερες παράμετροι περιορίζονται σε μία (σταθερά ζεύξης α).

[26]Πιο σωστά, η κατάσταση $Q|0\rangle$ είναι άπειρου μέτρου και δεν ανήκει στο χώρο Hilbert του συστήματος.

[27]Για μια συζήτηση του 1ου μοντέλου Goldstone βλ. [22, 30].

Η (1.108) παραμένει αναλλοίωτη κάτω απ΄ τους μετασχηματισμούς της ομάδας $U(1)$

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \mathrm{e}^{i\omega}\phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow \mathrm{e}^{-i\omega}\phi^\dagger . \end{aligned} \tag{1.110}$$

Αν $\mu^2 > 0$, το δυναμικό (1.109) παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $\phi = 0$. Αν $\mu^2 < 0$, τα ελάχιστα του δυναμικού ικανοποιούν τη σχέση

$$2\phi^\dagger\phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{6\mu^2}{\lambda} \equiv v^2, \tag{1.111}$$

με $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$. Τα ελάχιστα αυτά κείνται πάνω σ΄ έναν κύκλο ακτίνας v κι ορίζουν ένα σύνολο από εκφυλισμένες καταστάσεις κενού. Επιλέγοντας μια κατάσταση κενού (έστω $|0\rangle_{SB}$) μέσω της συνθήκης $\phi_1 = v$, $\phi_2 = 0$ κι ορίζοντας $\phi_1' = \phi_1 - v$, $\phi_2' = \phi_2$, το δυναμικό (1.109) γίνεται

$$V(\phi_1', \phi_2') = \frac{\lambda}{4!}(\phi_1'^2 + \phi_2'^2 + 2v\phi_1')^2, \tag{1.112}$$

το οποίο περιγράφει 2 βαθμωτά πεδία: το ϕ_1' με μάζα $m = \left(\frac{\lambda v^2}{3}\right)^{1/2}$ και το άμαζο πεδίο ϕ_2'. Τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης συνοψίζονται στο **θεώρημα Goldstone**: σε κάθε συνεχή συμμετρία που θραύεται αυθόρμητα αντιστοιχεί ένα άμαζο βαθμωτό μποζόνιο Nambu-Goldstone.[28] Σημειώνουμε επίσης ότι η κατάσταση $|0\rangle_{SB}$ θα καταστρέφεται απ΄ τους τελεστές $a_{\phi_1'}$ και $a_{\phi_2'}$ των πεδίων ϕ_1', ϕ_2', αλλά απ΄ την (1.111), θα έχουμε

$${}_{SB}\langle 0|\phi|0\rangle_{SB} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \tag{1.113}$$

δηλαδή η αναμενόμενη τιμή του πεδίου για την κατάσταση κενού ταυτίζεται με το κλασσικό ελάχιστο του δυναμικού. Σύμφωνα με τη συζήτηση στην Ενότητα 1.3.2, η

$$\phi_c \equiv \langle 0|\phi|0\rangle \tag{1.114}$$

αποτελεί την **παράμετρο τάξης** της θεωρίας.

Ο μηχανισμός Higgs

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση στην οποία το μοντέλο Goldstone είναι αναλλοίωτο κάτω απ΄ τους τοπικούς μετασχηματισμούς $U(1)$:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \mathrm{e}^{i\omega(x)}\phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow \phi'^\dagger = \mathrm{e}^{-i\omega(x)}\phi^\dagger . \end{aligned} \tag{1.115}$$

Σύμφωνα με την Ενότητα 1.4.1, θα πρέπει οι παραγωγίσεις στην (1.108) να αντικατασταθούν από συναλλοίωτες παραγωγίσεις σύμφωνα με την Εξ. (1.83) και να εισάγουμε στη Λαγκρανζιανή νέα πεδία βαθμίδας. Το μοντέλο που προκύπτει ονομάζεται μοντέλο Higgs και περιγράφεται απ΄ τη Λαγκρανζιανή

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi^\dagger\phi) \\ &= (\partial_\mu\phi^\dagger - ieA_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - V(\phi^\dagger\phi), \end{aligned} \tag{1.116}$$

όπου το $V(\phi^\dagger\phi)$ δίνεται απ΄ την (1.109). Για $\mu^2 < 0$ τα ελάχιστα του δυναμικού δίνονται όπως και πριν απ΄ τη σχέση (1.111). Ορίζοντας $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\mathrm{e}^{i\theta}$,$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\mathrm{e}^{-i\theta}$ η (1.116) γίνεται [30]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')(\partial^\mu\rho') + \frac{1}{2}(\rho' + v)^2(\partial_\mu\theta + eA_\mu)(\partial^\mu\theta + eA^\mu) - V(\rho' + v), \tag{1.117}$$

[28] Για μια πιο αυστηρή παρουσίαση του μηχανισμού Goldstone, βλ. [12, 22, 30].

όπου $\rho' = \rho - v$. Παρατηρούμε ότι κάτω απ' τους μετασχηματισμούς (1.115), έχουμε $\theta(x) \to \theta(x) + \omega(x)$, άρα στη μοναδιακή βαθμίδα $\theta(x) = 0$, η (1.117) περιγράφει 2 πεδία: ένα βαθμωτό πεδίο ρ' με μάζα $m_{\rho'} = \left(\frac{\lambda v^2}{3}\right)^{1/2}$ κι ένα διανυσματικό πεδίο A_μ με μάζα $m_A = ev$. Βλέπουμε ότι το μποζόνιο Nambu-Goldstone εξαφανίστηκε απ' το φάσμα ως ένας άμαζος βαθμός ελευθερίας κι επανεμφανίστηκε ως διαμήκης συνιστώσα του μαζικού διανυσματικού πεδίου A_μ [22].[29] Το φαινόμενο της εμφάνισης μαζικών βαθμωτών μποζονίων Higgs (ρ') για κάθε συμμετρία βαθμίδας που θραύεται αυθόρμητα ονομάζεται **φαινόμενο Higgs**.

1.5.2 Δυναμική θραύση συμμετρίας: το μοντέλο Nambu-Jona-Lasinio

Η δυναμική θραύση συμμετρίας είναι η ειδική περίπτωση της αυθόρμητης θραύσης συμμετρίας για την οποία το πεδίο ϕ στη σχέση (1.114) είναι σύνθετο [30]. Βασικό χαρακτηριστικό της δυναμικής θραύσης συμμετρίας είναι ότι η ίδια η παραβίαση της συμμετρίας δεν εμφανίζεται σε 1η τάξη της θεωρίας διαταραχών, αλλά είναι συνδεδεμένη με τις διορθώσεις ακτινοβολίας. Συγκεκριμένα η δυναμική των αλληλεπιδράσεων μπορεί μέσω των διορθώσεων ακτινοβολίας να μεταβάλλει την τιμή του $\langle\phi\rangle$, οδηγώντας το πεδίο σε ασταθείς ή μετασταθείς καταστάσεις κενού. Η θραύση της συμμετρίας πραγματώνεται ύστερα μέσω της επιλογής μιας ευσταθούς κατάστασης κενού απ' το σύνολο των εκφυλισμένων καταστάσεων που διαθέτει η θεωρία [12]. Εδώ θα εξετάσουμε το μοντέλο Nambu-Jona-Lasinio [31], το οποίο παρουσιάζει δυναμικό σπάσιμο της χειραλικής συμμετρίας.

Η Λακγρανζιανή του μοντέλου NJL γενικευμένη για N φερμιονικές γεύσεις είναι [30]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g_0\sum_{a=0}^{N^2-1}\left[\left(\bar{\psi}\frac{\lambda^a}{2}\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}\frac{\lambda^a}{2}i\gamma_5\psi\right)^2\right] \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + 2g_0\bar{\psi}^a_L\psi^b_R\bar{\psi}^b_R\psi^a_L. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Λόγω της έλλειψης όρου μάζας, η (1.118) είναι αναλλοίωτη κάτω απ' τους μετασχηματισμούς της ομάδας $U_L(N) \times U_R(N)$. Η εξίσωση κίνησης που αντιστοιχεί στην (1.118) είναι

$$i\not{\partial}\psi + \frac{g_0}{2}(\bar{\psi}\lambda^a\psi)\lambda^a\psi + \frac{g_0}{2}(\bar{\psi}i\lambda^a\gamma_5\psi)i\lambda^a\gamma_5\psi = 0. \tag{1.119}$$

Εισάγοντας τις προσεγγίσεις

$$\frac{g_0}{2}(\bar{\psi}\lambda^0\psi)\lambda^0 \to \frac{g_0}{N}\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \equiv -m_{dyn} \tag{1.120}$$

$$(\bar{\psi}\lambda^a\psi) = 0 \quad \text{αν} \quad a \neq 0 \tag{1.121}$$

$$(\bar{\psi}i\lambda^a\gamma_5\psi) = 0, \tag{1.122}$$

η (1.119) παίρνει τη μορφή

$$(i\not{\partial} - m_{dyn})\psi = 0, \tag{1.123}$$

η οποία είναι η εξίσωση κίνησης του ελεύθερου πεδίου Dirac, στην οποία η μάζα πλέον δεν αποτελεί ελεύθερη παράμετρο, αλλά προσδιορίζεται απ' τη δυναμική της θεωρίας μέσω της σχέσης

$$m_{dyn} = -\frac{g_0}{N}\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = i\frac{g_0}{N}\lim_{x\to 0}\mathrm{Tr}[G(x)], \tag{1.124}$$

όπου $G(x)$ ο διαδότης του πεδίου Dirac:

$$G(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-ipx}}{\not{p} - m_{dyn} + i\epsilon}. \tag{1.125}$$

[29] Λέμε ότι το άμαζο πεδίο βαθμίδας A_μ που διαθέτει 2 βαθμούς ελευθερίας 'κατάπιε' το μποζόνιο Nambu-Goldstone και μετατράπηκε στο μαζικό διανυσματικό πεδίο A'_μ που διαθέτει 3 βαθμούς ελευθερίας.

Μέσω των (1.124), (1.125) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$m_{dyn} = \frac{4ig_0 N}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{m_{dyn}}{p^2 - m_{dyn}^2 + i\epsilon}. \tag{1.126}$$

Η (1.126) έχει πάντα μια τετριμμένη λύση $m_{dyn} = 0$, η οποία αντιστοιχεί στη φάση όπου η θεωρία είναι χειραλικά συμμετρική. Αποδεικνύεται [30] ότι όταν $\frac{g_0 N\Lambda^2}{2\pi^2} > 1$, όπου Λ μια ορμή αποκοπής, η (1.126) διαθέτει και μία μη-τετριμμένη λύση $m_{dyn} \neq 0$, που αντιστοιχεί στη χειραλικά ασυμμετρική φάση, στην οποία η ομάδα συμμετρίας $U_L(N)\times U_R(N)$ θραύεται στη διαγώνια υποομάδα της $U_V(N)$. Στη φάση όπου η χειραλική συμμετρία είναι σπασμένη, εμφανίζονται N^2 άμαζα ψευδοβαθμωτά μποζόνια Nambu-Goldstone, τα οποία αποτελούν δέσμιες καταστάσεις φερμιονίων-αντιφερμιονίων. Όπως φαίνεται απ΄ την Εξ. (1.120), η $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ αποτελεί την παράμετρο τάξης του μοντέλου NJL, δηλ. στη μη-συμμετρική φάση η κατάσταση κενού της θεωρίας αποτελείται από χειραλικά συμπυκνώματα φερμιονίων-αντιφερμιονίων[30].

1.6 Ο φορμαλισμός της ενεργού δράσης

Όπως είδαμε στην Ενότητα 1.5, η παράμετρος τάξης που σηματοδοτεί τη θραύση κάποιας συμμετρίας της θεωρίας δίνεται απ΄ την αναμενόμενη τιμή του κβαντικού πεδίου $\langle\phi\rangle$. Στην κβαντική θεωρία πεδίου, η τιμή του $\langle\phi\rangle$ δεν αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του δυναμικού $V(\phi)$, καθώς η τιμή αυτή μεταβάλλεται απ΄ τις διορθώσεις ακτινοβολίας [12]. Η συνάρτηση της οποίας το ελάχιστο αντιστοιχεί στην τιμή του $\langle\phi\rangle$ ονομάζεται ενεργό δυναμικό και η κατασκευή της γίνεται ως ακολούθως.
Θεωρούμε μια κβαντική θεωρία πεδίου με ένα βαθμωτό πεδίο ϕ συζευγμένο σε μια εξωτερική βαθμωτή πηγή J. Ορίζουμε ένα συναρτησιοειδές ενέργειας [11][31]

$$Z[J] = \mathrm{e}^{\mathcal{W}[J]} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}[\phi] + J\phi)\right]. \tag{1.127}$$

Παραγωγίζοντας την (1.127) ως προς την εξωτερική πηγή, παίρνουμε

$$-i\frac{\delta\mathcal{W}[J]}{\delta J(x)} = -i\frac{\delta}{\delta J(x)}\ln Z = \frac{\int\mathcal{D}\phi \mathrm{e}^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)}{\int\mathcal{D}\phi \mathrm{e}^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}} = \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J, \tag{1.128}$$

δηλαδή το $\mathcal{W}[J]$ είναι το γεννόν συναρτησιοειδές των συναρτήσεων συσχέτισης του πεδίου ϕ. Ορίζουμε τώρα το μετασχηματισμό Legendre του $\mathcal{W}[J]$ μέσω της σχέσης

$$\Gamma[\phi] = -i\mathcal{W}[J] - \int d^4y J(y)\phi(y). \tag{1.129}$$

Η ποσότητα $\Gamma[\phi]$ είναι γνωστή ως **ενεργός δράση**. Η παράγωγός της ως προς το πεδίο ϕ στο όριο όπου $J\to 0$ είναι

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right|_{J\to 0} = \left[-i\int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\frac{\delta\mathcal{W}[J]}{\delta J(y)} - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y) - J(x)\right]_{J\to 0} = 0, \tag{1.130}$$

συνεπώς οι λύσεις της (1.130) δίνουν τις τιμές του $\langle\phi(x)\rangle$ στις σταθερές καταστάσεις κενού της θεωρίας. Αν κατ΄ αναλογία με τη στατιστική φυσική (όπου η $\Gamma[\phi]$ είναι εκτατική συνάρτηση) ορίσουμε

$$\Gamma[\phi] = -(VT)V_{\text{eff}}[\phi], \tag{1.131}$$

[30] Για μια πιο ενδελεχή συζήτηση της δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας σε διάφορα πεδιοθεωρητικά μοντέλα, βλ. [30].

[31] Κατ΄ αναλογία με τη στατιστική φυσική, το $Z[J]$ αντιστοιχεί στη συνάρτηση επιμερισμού, το $\mathcal{W}[J]$ στην ελεύθερη ενέργεια Helmholtz και η πηγή J παίζει το ρόλο ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

όπου VT ο όγκος του χωροχρονικού χωρίου πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση και $V_{\rm eff}$ το λεγόμενο **ενεργό δυναμικό**, τότε η (1.130) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial \phi} = 0. \tag{1.132}$$

Μια θεωρία που εμφανίζει αυθόρμητη θραύση συμμετρίας θα διαθέτει διαφορετικά ελάχιστα του $V_{\rm eff}$ που θα αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της ενέργειας (μετασταθείς καταστάσεις κενού). Το απόλυτο ελάχιστο του ενεργού δυναμικού αποτελεί την πραγματική, ευσταθή κατάσταση κενού της θεωρίας [12]. Υπολογίζοντας τώρα τις συναρτησιακές παραγώγους του $\mathcal{W}[J]$ ως προς τις εξωτερικές πηγές, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} &= -\frac{\int \mathcal{D}\phi\ {\rm e}^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\phi(y)}{\int \mathcal{D}\phi\ {\rm e}^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}} \\
&\quad -\frac{\int \mathcal{D}\phi\ {\rm e}^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\int \mathcal{D}\phi\ {\rm e}^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(y)}{Z^2} \\
&= -\langle\phi(x)\phi(y)\rangle - \langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle.
\end{aligned} \tag{1.133}$$

Αποδεικνύεται [12] ότι ο δεύτερος όρος της (1.133) εξουδετερώνει τα μη συνδεδεμένα διαγράμματα Feynman, οπότε επιβιώνει μόνο ο πρώτος όρος που αντιπροσωπεύει τα συνδεδεμένα διαγράμματα

$$\frac{\delta^n \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)} = (-1)^{n+1}\langle\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\rangle_{\rm conn}, \tag{1.134}$$

δηλαδή το $\mathcal{W}[J]$ είναι το γεννόν συναρτησιοειδές των συνδεδεμένων συναρτήσεων συσχέτισης[32]. Τέλος, αν παραγωγίσουμε την Εξ. (1.130) ως προς $J(y)$ παίρνουμε

$$\delta(x-y) = -\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = -\int d^4z \frac{\delta\phi(z)}{\delta J(y)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(x)} = \int d^4z\ i\frac{\delta^2\mathcal{W}[J]}{\delta J(y)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(x)}. \tag{1.135}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την Εξ. (1.134), η (1.135) δίνει

$$\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} = \left[i\frac{\delta^2\mathcal{W}[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\right]^{-1} = D^{-1}(x,y), \tag{1.136}$$

όπου $D(x,y)$ ο ακριβής διαδότης της θεωρίας.

[32] Η συνδεδεμένη 2-σημειακή συνάρτηση συσχέτισης $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ ταυτίζεται με τον ακριβή διαδότη της θεωρίας.

Κεφαλαιο 2

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ SCHWINGER-DYSON

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η διαταρακτική διατύπωση της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Κομβικό ρόλο στη διαταρακτική θεωρία παίζει το ανάπτυγμα (1.64), πάνω στο οποίο θεμελιώνονται οι κανόνες Feynman για τον υπολογισμό κβαντομηχανικών πλατών που σχετίζονται με φυσικά παρατηρίσιμα μεγέθη. Η (1.64) μπορεί να γραφτεί συμβολικά στη μορφή

$$S(g) = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \ldots + a_n g^n + \ldots, \tag{2.1}$$

όπου g η σταθερά σύζευξης και τα a_i αντιπροσωπεύουν τα σύνολα των διαγραμμάτων Feynman που αντιστοιχούν στην i-οστή τάξη της θεωρίας διαταραχών. Η εξαιρετική συμφωνία μεταξύ θεωρίας και πειράματος στα πλαίσια της QED βασίζεται στο γεγονός ότι η σταθερά σύζευξης έχει πολύ μικρή τιμή ($g = \mathcal{O}(10^{-2})$), οπότε για τον υπολογισμό φυσικά παρατηρήσιμων μεγεθών αρκεί συνήθως ο υπολογισμός των πρώτων όρων της (2.1). Αντίθετα, στην περίπτωση της QCD ή στη φάση ισχυρής σύζευξης της QED όπου $g = \mathcal{O}(1)$, οι ανώτεροι όροι της (2.1) είναι της ίδιας τάξης με τους κατώτερους κι ο διαταρακτικός υπολογισμός παρατηρήσιμων μεγεθών καθίσταται αδύνατος.[1]
Για τις παραπάνω περιπτώσεις χρειαζόμαστε μη-διαταρακτικές μεθόδους. Οι Schwinger και Dyson κατασκεύασαν ένα άπειρο σύστημα συζευγμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων [19, 34, 35], το οποίο συνδέει τις n-σημειακές με τις $(n+1)$-σημειακές ακριβείς συναρτήσεις συσχέτισης της θεωρίας. Η πλήρης αναλυτική λύση των εξισώσεων αυτών παραμένει μέχρι σήμερα άγνωστη, αλλά η μελέτη τους μέσω σχημάτων περικοπής (truncation schemes) κι αριθμητικών μεθόδων μπορεί να μας παρέχει πρόσβαση στη μη-διαταρακτική δυναμική της θεωρίας, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την εξαγωγή των εξισώσεων Schwinger-Dyson στα πλαίσια της QED.

2.1 Οι εξισώσεις SD στον κανονικό φορμαλισμό

Η αλληλεπιδρώσα Λαγκρανζιανή στην QED είναι

$$\mathcal{L}_I = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi.$$

Ακολουθώντας τον Schwinger[2] [34], εισάγουμε μια εξωτερική διανυσματική πηγή $J^\mu(x)$, η οποία μπορεί να αλληλεπιδρά με το φωτονικό πεδίο $A_\mu(x)$. Η φυσική σημασία της εξωτερικής πηγής θα αποκαλυφθεί στη συνέχεια, καθώς εξετάζουμε την απόκριση του συστήματος κάτω από διαταραχές της εξωτερικής πηγής. Η αλληλεπιδρώσα Χαμιλτονιανή γίνεται τώρα:

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) + J^\mu(x)A_\mu(x). \tag{2.2}$$

[1] Σημειώνουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση ασθενούς σύζευξης η (2.1) είναι ασυμπτωτική και αποκλίνουσα [20, 32]. Το πρόβλημα του κατά πόσο το διαταρακτικό ανάπτυγμα ταυτίζεται με τη μη-διαταρακτική λύση της θεωρίας ονομάζεται αθροισιμότητα Borel. Έχει αποδειχθεί [33] ότι κάτι τέτοιο ισχύει στην QED, δηλ. η QED λέγεται ότι είναι Borel αθροίσιμη.

[2] Μια εκτενής κι ιδιαίτερα παιδαγωγική παρουσίαση της εξαγωγής των εξισώσεων SD μέσω κανονικού φορμαλισμού για την απλούστερη περίπτωση της θεωρίας Yukawa υπάρχει στο [7].

Όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Α′, ο ακριβής φερμιονικός διαδότης γράφεται

$$G(x,y) = -i\frac{\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{2.3}$$

Ορίζουμε τον **φερμιονικό πυρήνα** (kernel) ως

$$K_{\sigma\rho}(x,y) \equiv -i\langle 0|T\{\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)S\}|0\rangle. \tag{2.4}$$

Έχουμε (Εξ. Α′.1),(Εξ. Α′.3)

$$\begin{aligned} K_{\sigma\rho}(x,y) &= -i\langle 0|T\{\overbracket{\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho}(y)S\}|0\rangle + i\langle 0|T\{\overbracket{\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)S}\}|0\rangle \\ &= S_F(x-y)\langle 0|S|0\rangle + \int dz\langle 0|T\{\overbracket{\psi(x)\mathcal{H}_I}(z)\bar{\psi}(y)S\}|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Από τις Εξ. (1.66) και (2.2), έχουμε όμως

$$\overbracket{\psi(x)\mathcal{H}_I}(z) = e\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(z)N\{\gamma^\mu A_\mu(z)\psi(z)\} = ieS_F(x-z)N\{\gamma^\mu A_\mu(z)\psi(z)\}, \tag{2.6}$$

οπότε η (2.5) γίνεται

$$K_{\sigma\rho}(x,y) = S_F(x-y)\langle 0|S|0\rangle + ie\int dz S_F(x-z)\langle 0|T\{\gamma^\mu\psi(z)\bar{\psi}(y)A_\mu(z)S\}|0\rangle. \tag{2.7}$$

Δρώντας στη (2.7) με τον τελεστή Dirac $\big(i\not{\partial} - m_0\big)$, παίρνουμε

$$(i\not{\partial} - m_0)K_{\sigma\rho}(x,y) = \delta(x-y)\langle 0|S|0\rangle + ie\gamma^\mu\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(x)S\}|0\rangle. \tag{2.8}$$

Από τη (2.4), έχουμε

$$\frac{\delta K}{\delta J^\mu(x)} = -i\left\langle 0\left|T\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\frac{\delta S}{\delta J^\mu(x)}\right\}\right|0\right\rangle. \tag{2.9}$$

Όμως (Εξ. Α′.16)

$$\frac{\delta S}{\delta J^\mu(x)} = -iT\{A_\mu(x)S\}, \tag{2.10}$$

οπότε η (2.9) γίνεται

$$\frac{\delta K}{\delta J^\mu(x)} = -\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(x)S\}|0\rangle. \tag{2.11}$$

Αντικαθιστώντας την (2.11) στη (2.8), παίρνουμε τελικά

$$\left[i\not{\partial} + ie\gamma^\mu\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} - m_0\right]K_{\sigma\rho}(x,y) = \delta(x-y)\langle 0|S|0\rangle. \tag{2.12}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta G(x,y)}{\delta J^\mu(x)} &= \frac{\delta K(x,y)}{\delta J^\mu(x)}\frac{1}{\langle 0|S|0\rangle} - K(x,y)\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta J^\mu(x)}\frac{1}{\langle 0|S|0\rangle^2} \\ &= \frac{\delta K(x,y)}{\delta J^\mu(x)}\frac{1}{\langle 0|S|0\rangle} - \frac{G(x,y)}{\langle 0|S|0\rangle}\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta J^\mu(x)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Μέσω της (2.10), έχουμε

$$\frac{1}{\langle 0|S|0\rangle}\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta J^\mu(x)} = -i\frac{\langle 0|T\{A_\mu(x)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} = -i\langle A_\mu(x)\rangle \equiv -i\hat{\mathcal{A}}_\mu(x). \tag{2.14}$$

Η (2.13) μέσω της (2.14), γίνεται

$$\frac{\delta K(x,y)}{\delta J^{\mu}(x)}\frac{1}{\langle 0|S|0\rangle} = \frac{\delta G(x,y)}{\delta J^{\mu}(x)} - iG(x,y)\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x). \tag{2.15}$$

Διαιρώντας την (2.12) με $\langle 0|S|0\rangle$ και χρησιμοποιώντας τη (2.15), παίρνουμε

$$\left[i\partial\!\!\!/ + ie\gamma^{\mu}\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(x)} + e\gamma^{\mu}\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x) - m_0\right]G(x,y) = \delta(x-y). \tag{2.16}$$

Για να απαλείψουμε το $\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x)$ από τη (2.16), εργαζόμαστε ως εξής. Από τον ορισμό του $\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x)$ και την Εξ. (2.10), έχουμε

$$\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x) = \frac{i}{\langle 0|S|0\rangle}\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta J^{\mu}(x)} = \frac{\langle 0|T\{A_{\mu}(x)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}, \tag{2.17}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x)}{\delta J^{\nu}(y)} &= \frac{1}{\langle 0|S|0\rangle}\left\langle 0\left|T\left\{A_{\mu}(x)\frac{\delta S}{\delta J^{\nu}(y)}\right\}\right|0\right\rangle - \frac{1}{\langle 0|S|0\rangle^2}\langle 0|T\{A_{\mu}(x)S\}|0\rangle\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta J^{\nu}(y)}\\ &= -i\frac{\langle 0|T\{A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} + i\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x)\hat{\mathcal{A}}_{\nu}(y)\\ &= D_{\mu\nu}(x,y) + i\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x)\hat{\mathcal{A}}_{\nu}(y).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Επειδή όμως για $J \to 0$, $\hat{\mathcal{A}}_{\mu} = 0$, η (2.18) δίνει[3]

$$D_{\mu\nu}(x,y) = \left.\frac{\delta\langle A_{\mu}(x)\rangle}{\delta J^{\nu}(y)}\right|_{J\to 0} = \left.\frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(x)}{\delta J^{\nu}(y)}\right|_{J\to 0}. \tag{2.19}$$

Η εξίσωση (2.19) μπορεί να θεωρηθεί ως ο ορισμός του **ακριβή φωτονικού διαδότη**. Η φυσική της σημασία είναι ότι ο διαδότης εκφράζει την απόκριση του συστήματος σε μια εξωτερική πηγή (probe). Ανάλογα ορίζουμε και τον **ακριβή φερμιονικό διαδότη** ως

$$G(x,y) = \left.\frac{\delta\langle\psi(x)\rangle}{\delta\eta(y)}\right|_{\eta\to 0}. \tag{2.20}$$

Παίρνοντας το όριο της (2.16) για $J \to 0$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta J^{\nu}(x)} = \int dz\frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(z)}{\delta J^{\nu}(x)}\frac{\delta G(x,y)}{\delta\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(z)}, \tag{2.21}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\left[i\partial\!\!\!/ - m_0 + e\gamma^{\nu}\hat{\mathcal{A}}_{\nu}(x)\right]_{J\to 0}G(x,y) + ie\gamma^{\nu}\int dz\left[D_{\mu\nu}(z,x)\frac{\delta}{\delta\hat{\mathcal{A}}_{\mu}(z)}\right]G(x,y) = \delta(x-y). \tag{2.22}$$

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω εξίσωση εκτός απ΄ τον ακριβή φερμιονικό διαδότη $G(x,y)$ εμπλέκεται κι ο ακριβής φωτονικός διαδότης $D_{\mu\nu}(x,y)$. Συνεπώς χρειαζόμαστε άλλη μια διαφορική εξίσωση για το $D_{\mu\nu}(x,y)$. Απ΄ την εξίσωση (2.19), παρατηρούμε ότι ο ακριβής φωτονικός διαδότης ορίζεται μέσω της συναρτησιακής παραγώγου του $\hat{\mathcal{A}}_{\mu}$ ως προς την εξωτερική διανυσματική πηγή. Άρα, για να καταλήξουμε

[3]Σημειώνουμε ότι $\hat{\mathcal{A}}_{\mu} \to 0$, στο όριο που $J^{\mu} \to 0$ κι αν το κενό υπακούει στις ίδιες συμμετρίες με το πεδίο. Σε περίπτωση που αυτό δε συμβαίνει (όπως στην περίπτωση του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας), $\hat{\mathcal{A}}_{\mu} \neq 0$ ακόμα και απουσία εξωτερικών πηγών.

σε μια εξίσωση για το $D_{\mu\nu}(x,y)$, πρέπει θεωρούμε πρώτα μια διαφορική εξίσωση για το $\hat{\mathcal{A}}_\mu$. Από τις Εξ. (Α$'$.1),(Α$'$.3) έχουμε

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu(x) = \frac{\langle 0|T\{A_\mu(x)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} = \frac{\langle 0|T\{A_\mu(x)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} = \frac{-i}{\langle 0|S|0\rangle}\int dy \langle 0|T\{A_\mu(x)\mathcal{H}_I(y)S\}|0\rangle \tag{2.23}$$

κι απ$'$ τη (2.2), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} A_\mu(x)\mathcal{H}_I(y) = A_\mu(x)A_\nu(y)N\{e\gamma^\nu\bar{\psi}(y)\psi(y)\} + A_\mu(x)A_\nu(y)J^\nu(y) = \\ D^F_{\mu\nu}(x-y)[ie\gamma^\nu N\{\bar{\psi}(y)\psi(y)\} + iJ^\nu(y)]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.24) στη (2.23), παίρνουμε

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu(x) = \frac{-i}{\langle 0|S|0\rangle}\int dy D^F_{\mu\nu}(x-y)[ie\gamma^\nu\langle 0|T\{\bar{\psi}(y)\psi(y)S\}|0\rangle + iJ^\nu(y)\langle 0|S|0\rangle]. \tag{2.25}$$

Δρώντας στη (2.25) με τον τελεστή d' Alembert κι επιλέγοντας μια γενική ξ-συναλλοίωτη βαθμίδα [11,14] $\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\hat{\mathcal{A}}_\mu(x) = \\ \frac{-i}{\langle 0|S|0\rangle}\int dy\delta(x-y)[ie\gamma^\nu\langle 0|T\{\bar{\psi}(y)\psi(y)S\}|0\rangle + iJ^\nu(y)\langle 0|S|0\rangle] = \\ J^\nu(x) + e\gamma^\nu\frac{\langle 0|T\{\bar{\psi}(x)\psi(x)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \end{aligned} \tag{2.26}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{\langle 0|T\{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} = -i\mathrm{Tr}[\gamma^\nu G(x,x)],$$

η (2.26) γίνεται τελικά

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\hat{\mathcal{A}}_\mu(x) = J^\nu(x) - ie\mathrm{Tr}[\gamma^\nu G(x,x)]. \tag{2.27}$$

Η (2.27) είναι μια διαφορική εξίσωση για την ποσότητα $\hat{\mathcal{A}}_\mu$. Δρώντας στη (2.27) με τον τελεστή $\frac{\delta}{\delta J^\rho(y)}$ και παίρνοντας το όριο $J\to 0$, έχουμε

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\left[\frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_\mu(x)}{\delta J^\rho(y)}\right]_{J\to 0} = \delta^\nu_\rho\delta(x-y) - ie\lim_{J\to 0}\frac{\delta\mathrm{Tr}[\gamma^\nu G(x,x)]}{\delta J^\rho(y)}. \tag{2.28}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.19) και (2.21), καταλήγουμε τελικά στη

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]D_{\mu\rho}(x,y) = \delta^\nu_\rho\delta(x-y) - ie\int dz\left[\frac{\delta\mathrm{Tr}[\gamma^\nu G(x,x)]}{\delta\hat{\mathcal{A}}_\mu(z)}\right]_{J\to 0}D_{\mu\rho}(z,y). \tag{2.29}$$

Οι εξισώσεις (2.22),(2.29) αποτελούν ένα σύστημα πεπλεγμένων (συναρτησιακών) ολοκληρωτικο-διαφορικών εξισώσεων, των οποίων οι λύσεις είναι οι ακριβείς διαδότες $D_{\mu\rho}(x,y)$ και $G(x,y)$.

Η συνάρτηση κορυφής

Για έναν ολοκληρωτικό τελεστή με πυρήνα το G μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο τελεστή με πυρήνα το G^{-1} μέσω των σχέσεων

$$\int dx' G^{-1}(x,x')G(x',y) = \delta(x-y) \tag{2.30}$$

$$\int dx' G(x,x')G^{-1}(x',y) = \delta(x-y). \tag{2.31}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} = \int dx' \frac{\delta G(x,x')}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} \delta(x'-y) \tag{2.32}$$

κι αντικαθιστώντας το $\delta(x'-y)$ στη (2.32) από τη (2.30), παίρνουμε

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} = \int dx' dx'' \frac{\delta G(x,x')}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} G^{-1}(x',x'')G(x'',y). \tag{2.33}$$

Απ' την (2.31), έχουμε

$$\int dx' \frac{\delta G(x,x')}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} G^{-1}(x',y) = -\int dx' G(x,x') \frac{\delta G^{-1}(x',y)}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)}, \tag{2.34}$$

οπότε η (2.33) μέσω της (2.34) γίνεται

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} = -\int dx' dx'' G(x,x') \frac{\delta G^{-1}(x',x'')}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} G(x'',y). \tag{2.35}$$

Ορίζουμε τη **συνάρτηση κορυφής** (vertex function) ως

$$\Gamma^\mu(x',x'',z) \equiv \frac{1}{e} \frac{\delta G^{-1}(x',x'')}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)}. \tag{2.36}$$

Η (2.35) μέσω της (2.36) γίνεται τελικά

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta \hat{\mathcal{A}}_\mu(z)} = -e \int dx' dx'' G(x,x')\Gamma^\mu(x',x'',z)G(x'',y). \tag{2.37}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κορυφής είναι μια **3-σημειακή συνάρτηση Green**, η οποία ορίζεται μέσω της 2-σημειακής συνάρτησης Green (του φερμιονικού διαδότη).

Ο τανυστής πόλωσης κενού

Αντικαθιστώντας τη (2.37) στη (2.29), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] D_{\mu\rho}(x,y) &= \delta^\nu_\rho \delta(x-y) + \int dz dx' dx'' D_{\mu\rho}(z,y) \\ &\times \; ie^2 \mathrm{Tr}[\gamma^\nu G(x,x')\Gamma^\mu(x',x'',z)G(x'',x)]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Ορίζουμε τον **τανυστή πόλωσης κενού** (vacuum polarization tensor) ως

$$\Pi^{\mu\nu}(x,z) \equiv ie^2 \mathrm{Tr}\left[\gamma^\nu \int dx' dx'' G(x,x')\Gamma^\mu(x',x'',z)G(x'',x)\right]. \tag{2.39}$$

Η διαγραμματική αναπαράσταση της (2.39), δίνεται στο Σχήμα 2.1.

$$\Pi^{\mu\nu}(x,z) \quad \equiv$$

Σχήμα 2.1. Ο τανυστής πόλωσης κενού

Η εξίσωση Schwinger-Dyson του φωτονικού διαδότη

Αντικαθιστώντας τη (2.39) στη (2.38), παίρνουμε

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu\right] D_{\mu\rho}(x,y) = \delta^\nu_\rho \delta(x-y) + \int dz \Pi^{\mu\nu}(x,z) D_{\mu\rho}(z,y), \tag{2.40}$$

η οποία είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους. Η λύση της είναι

$$D_{\mu\rho}(x,y) = \int dx' D^F_{\mu\nu}(x-x') \left[\delta^\nu_\rho \delta(x'-y) + \int dz \Pi^{\mu\nu}(x',z) D_{\mu\rho}(z,y)\right], \tag{2.41}$$

η οποία παίρνει τελικά τη μορφή

$$D_{\mu\rho}(x,y) = D^F_{\mu\rho}(x-y) + \int dx' dz D^F_{\mu\nu}(x-x') \Pi^{\mu\nu}(x',z) D_{\mu\rho}(z,y). \tag{2.42}$$

Η (2.42) είναι η **εξίσωση Schwinger-Dyson του φωτονικού διαδότη**. Η διαγραμματική αναπαράστασή της δίνεται στο Σχήμα 2.2.

Σχήμα 2.2. Η εξίσωση SD για τον φωτονικό διαδότη

Ο τελεστής ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου

Αντικαθιστώντας τη (2.37) στη (2.22), παίρνουμε

$$[i\not{\partial} - m_0] G(x,y) - ie^2 \gamma^\nu \int dz dx' dx'' D(z,x) G(x,x') \Gamma^\mu(x',x'',z) G(x'',y) = \delta(x-y). \tag{2.43}$$

Ορίζουμε τον **τελεστή ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου (self-energy operator)** ως

$$\Sigma^{\mu\nu}(x,x'') \equiv ie^2 \gamma^\nu \int dz dx' G(x,x') \Gamma^\mu(x',x'',z) D(z,x). \tag{2.44}$$

Η διαγραμματική αναπαράσταση της (2.44), δίνεται στο Σχήμα 2.3.

$$\Sigma^{\mu\nu}(x,x'') \quad \equiv$$

Σχήμα 2.3. Ο τελεστής ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου.

Η εξίσωση Schwinger-Dyson του φερμιονικού διαδότη

Αντικαθιστώντας τη (2.44) στη (2.43) παίρνουμε

$$[i\partial\!\!\!/ - m_0]G(x,y) = \delta(x-y) + \int dx''\Sigma(x,x'')G(x'',y). \tag{2.45}$$

Η λύση της (2.45) γράφεται

$$G(x,y) = \int dx' S_F(x-x')\left[\delta(x'-y) + \int dx''\Sigma(x,x'')G(x'',y)\right], \tag{2.46}$$

η οποία παίρνει τελικά τη μορφή

$$G(x,y) = S_F(x-y) + \int dx'dx'' S_F(x-x')\Sigma(x',x'')G(x'',y). \tag{2.47}$$

Η εξίσωση (2.47) είναι **εξίσωση Schwinger-Dyson του φερμιονικού διαδότη**. Η διαγραμματική αναπαράστασή της δίνεται στο Σχήμα 2.4.

Σχήμα 2.4. Η εξίσωση SD για τον φερμιονικό διαδότη

2.2 Οι εξισώσεις SD στο συναρτησιακό φορμαλισμό

Είδαμε στην Ενότητα 1.6, ότι οι n-σημειακές (one-particle irreducible) συναρτήσεις συσχέτισης μπορούν να εκφραστούν μέσω των συναρτησιακών παραγώγων της ενεργού δράσης ως προς τις αντίστοιχες εξωτερικές πηγές, μέσω της σχέσης

$$\frac{\delta^n\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)...\delta\phi(x_n)} = -i\langle\phi(x_1)...\phi(x_n)\rangle_{1PI}.$$

Δηλαδή η ενεργός δράση $\Gamma[\phi]$ είναι το γεννόν συναρτησιοειδές των one-particle irreducible συναρτήσεων συσχέτισης του πεδίου ϕ. Οι εξισώσεις Schwinger-Dyson ως κβαντικές εξισώσεις κίνησης των συναρτήσεων συσχέτισης πρέπει να σχετίζονται με την ενεργό δράση και το γεννόν συναρτησιοειδές μέσω του οποίου ορίζεται μια κβαντική θεωρία πεδίου[4].

Για την QED, εισάγουμε ένα γεννόν συναρτησιοειδές με μια διανυσματική πηγή J^μ, μια σπινοριακή πηγή η και μια αντισπινοριακή πηγή $\bar{\eta}$ συζευγμένες αντίστοιχα στο φωτονικό, αντιφερμιονικό και φερμιονικό πεδίο, μέσω της σχέσης

$$Z[J^\mu,\eta,\bar{\eta}] = e^{\mathcal{W}[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]} = \int \mathcal{D}[A_\mu\psi\bar{\psi}]\exp\left\{iS[A_\mu,\psi,\bar{\psi}] + i\int d^4x\left(A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right)\right\}, \tag{2.48}$$

με

$$S[A_\mu,\psi,\bar{\psi}] = \int d^4x\left\{\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - e\gamma^\mu A_\mu)\psi - A_\mu\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu\right\}. \tag{2.49}$$

[4] Για την εξαγωγή των εξισώσεων SD μέσω συναρτησιακού φορμαλισμού, βλ. συμπληρωματικά [11, 36].

Η εξαγωγή των εξισώσεων Schwinger-Dyson βασίζεται στην παρατήρηση ότι το συναρτησιακό ολοκλήρωμα μιας ολικής παραγώγου μηδενίζεται:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} F[\phi] = 0, \tag{2.50}$$

στην περίπτωση που το μέτρο ολοκλήρωσης $\mathcal{D}\phi$ είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς μετάθεσης της μορφής $\phi(x) \to \phi(x) + \epsilon(x)$.
Στην περίπτωση της QED, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}[A_\mu \psi \bar{\psi}] \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)} \exp\left\{ iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^4x \left(A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}[A_\mu \psi \bar{\psi}] i \left[\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)} + \eta(x) \right] \exp\left\{ iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^4x \left(A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right) \right\} \\ &= \left[\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)} \left(-i\frac{\delta}{\delta J^\mu}, -i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, i\frac{\delta}{\delta\eta} \right) + \eta(x) \right] Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Στην παραπάνω σχέση ο συμβολισμός $\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\mu}, -i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, i\frac{\delta}{\delta\eta}\right)$ υποδηλώνει την αντικατάσταση των πεδίων $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$ με τις αντίστοιχες συναρτησιακές παραγώγους.

Ο φερμιονικός διαδότης

Η (2.51) μέσω της (2.49), γίνεται

$$0 = \left[\eta(x) + \left(i\not{\partial} - m_0 - e\gamma^\mu(-i)\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right)(-i)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \right] Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}], \tag{2.52}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τα πεδία με τις συναρτησιακές παραγώγους ως προς τις αντίστοιχες εξωτερικές πηγές. Παραγωγίζοντας τη (2.52) ως προς $\eta(y)$ και θέτοντας $\eta = \bar{\eta} = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta\eta(x)}{\delta\eta(y)} Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}]_{\eta=\bar{\eta}=0} + \left(i\not{\partial} - m_0 - e\gamma^\mu(-i)\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right)(-i) \left. \frac{\delta^2 Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}]}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= \delta(x-y) Z[J^\mu] - \left(i\not{\partial} - m_0 - e\gamma^\mu(-i)\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) Z[J^\mu] G(x,y) \\ &= e^{\mathcal{W}[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]} \left[\delta(x-y) - \left(i\not{\partial} - m_0 - e\gamma^\mu(-i)\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J^\mu(x)} - e\gamma^\mu(-i)\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) G(x,y) \right]. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$-i\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J^\mu(x)} = \hat{\mathcal{A}}_\mu(x) \tag{2.54}$$

και (Εξ. 2.19)

$$D_{\mu\nu}(x,y) = \frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_\nu(x)}{\delta J^\mu(y)}.$$

Επίσης, ο ακριβής φερμιονικός διαδότης ορίζεται με τη βοήθεια της ενεργού δράσης μέσω της σχέσης

$$\left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=0} = G^{-1}(x,y). \tag{2.55}$$

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση κορυφής με τη βοήθεια της ενεργού δράσης ως

$$\Gamma^\mu(x,y,z) \equiv \frac{1}{e} \frac{\delta}{\delta\hat{\mathcal{A}}_\mu(x)} \left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(z)} \right|_{A,\psi,\bar{\psi}=0}. \tag{2.56}$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
-i\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}G(x,y) &= -i\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x)\delta\psi(y)}\bigg|_{\psi=\bar\psi=0}\right]^{-1} \\
&= -i\int dz\frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_\nu(z)}{\delta J^\mu(x)}\frac{\delta}{\delta\hat{\mathcal{A}}_\nu(z)}\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x)\delta\psi(y)}\bigg|_{\psi=\bar\psi=0}\right]^{-1} \\
&= i\int dzdudw\frac{\delta\hat{\mathcal{A}}_\nu(z)}{\delta J^\mu(x)}\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x)\delta\psi(w)}\right]^{-1}\frac{\delta}{\delta\hat{\mathcal{A}}_\nu(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(u)\delta\psi(w)}\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(w)\delta\psi(y)}\right]^{-1} \\
&= ie\int dzdudw\,[D_{\mu\nu}(x,z)G(x,w)\Gamma^\nu(z,u,w)G(w,y)]. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Θέτοντας τώρα στη (2.53) τις εξωτερικές πηγές ίσες με μηδέν και χρησιμοποιώντας τη (2.57), παίρνουμε

$$
(i\not\partial - m_0)G(x,y) - ie^2\gamma^\mu\int dzdudw\,[D_{\mu\nu}(x,z)G(x,w)\Gamma^\nu(z,u,w)G(w,y)] = \delta(x-y) \qquad (2.58)
$$

και ορίζοντας τον τελεστή ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου

$$
\Sigma(x,w) \equiv ie^2\gamma^\mu\int dzdu\,[D_{\mu\nu}(x,z)G(x,w)\Gamma^\nu(z,u,w)], \qquad (2.59)
$$

η (2.58) γίνεται

$$
(i\not\partial - m_0)G(x,y) = \delta(x-y) + \int dw\Sigma(x,w)G(w,y), \qquad (2.60)
$$

με λύση την εξίσωση SD του φερμιονικού διαδότη (Εξ. 2.47).

Ο φωτονικός διαδότης

Μεταβάλλοντας τώρα τη δράση ως προς το φωτονικό πεδίο, παίρνουμε απ' τη (2.51)

$$
\left[\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)}\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\mu}, -i\frac{\delta}{\delta\bar\eta}, i\frac{\delta}{\delta\eta}\right) + J^\mu(x)\right]Z[J^\mu,\eta,\bar\eta] = 0. \qquad (2.61)
$$

Οπότε εκτελώντας τις παραγωγίσεις στη (2.49) κι αντικαθιστώντας τα πεδία με τις αντίστοιχες συναρτησιακές παραγώγους, έχουμε

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\{J^\mu(x) - \left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu(x) - e\left(i\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\gamma^\mu\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\right)\right\}e^{\mathcal{W}[J^\mu,\eta,\bar\eta]} \\
&= \left\{J^\mu(x) - \left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu(x) - e\left[\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\delta^2\mathcal{W}}{\delta\eta_\alpha(x)\delta\bar\eta_\beta(x)}\right]\right\}e^{\mathcal{W}[J^\mu,\eta,\bar\eta]} \\
&= \left\{J^\mu(x) - \left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu(x) + ie\mathrm{Tr}[\gamma^\mu G(x,x)]\right\}e^{\mathcal{W}[J^\mu,\eta,\bar\eta]} \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$
\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu(x) = J^\mu(x) + ie\mathrm{Tr}[\gamma^\mu G(x,x)]. \qquad (2.63)
$$

Δρώντας στη (2.63) με τον τελεστή $\frac{\delta}{\delta J^\rho(y)}$, παίρνουμε

$$
\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\frac{\delta A_\nu(x)}{\delta J^\rho(y)} = \delta^\mu_\rho\delta(x-y) + ie\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{\delta G(x,x)}{\delta J^\rho(y)}\right] \qquad (2.64)
$$

και χρησιμοποιώντας τις (2.19),(2.39),(2.57), η (2.64) γίνεται

$$\begin{aligned}\left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] D_{\nu\rho}(x,y) &= \delta^\mu_\rho \delta(x-y) \\ &- ie^2 \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \int dz dx' dx'' D_{\nu\rho}(z,y) G(x,x') \Gamma^\nu(x',x'',z) G(x'',x)\right] \\ &= \delta^\mu_\rho \delta(x-y) - \int dz \Pi^{\mu\nu}(x,z) D_{\nu\rho}(z,y), \end{aligned} \tag{2.65}$$

με λύση την εξίσωση SD του φωτονικού διαδότη (Εξ. 2.42).[5]

2.3 Το ανάπτυγμα Dyson και η επανακανονικοποίηση των εξισώσεων SD

Οι Εξισώσεις (2.42) και (2.47) είναι συζευγμένες κι η λύση τους απαιτεί τη γνώση της συνάρτησης κορυφής $\Gamma^\mu(x',x'',z)$. Μια επαναληπτική λύση των εξισώσεων SD μπορεί όμως να γραφτεί σε κλειστή μορφή μέσω των τελεστών ιδιοενέργειας Σ και Π. Εισάγοντας τους μετασχηματισμούς Fourier του ακριβή φερμιονικού διαδότη

$$G(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(p) \mathrm{e}^{-ip(x-y)} dp, \tag{2.66}$$

του τελεστή ιδιοενέργειας

$$\Sigma(x',x'') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Sigma(k') \mathrm{e}^{-ik'(x'-x'')} dk' \tag{2.67}$$

και του ελεύθερου φερμιονικού διαδότη

$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{-iq(x-x')}}{\not{p} - m_0 - i\epsilon} dq \tag{2.68}$$

κι αντικαθιστώντας στη (2.47), παίρνουμε

$$G(p) = S_F(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p). \tag{2.69}$$

Η Εξ. (2.69) ονομάζεται **ανάπτυγμα Dyson** του φερμιονικού διαδότη[6]. Η διαγραμματική της αναπαράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.5.

Σχήμα 2.5. Το ανάπτυγμα Dyson του φερμιονικού διαδότη

Η λύση της (2.69) γράφεται

$$G(p) = \frac{S_F(p)}{1 - S_F(p)\Sigma(p)} = \frac{1}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p) - i\epsilon} \tag{2.70}$$

[5] Σημειώνουμε ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των Εξ. (2.40), (2.65) που προκύπτει στο κομμάτι ιδιοενέργειας οφείλεται στο διαφορετικό είδος πηγών που χρησιμοποιήσαμε στους 2 φορμαλισμούς (Βλ. σχέσεις 2.2 και 2.48).

[6] Η Εξ. (2.69) είναι γνωστή κι ως εξίσωση Dyson [19]. Για μια περισσότερο παιδαγωγική παρουσίαση, βλ. [7, 37].

Συγκρίνοντας τη (2.70) με την εξίσωση του ελεύθερου φερμιονικού διαδότη (1.46), παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα των διορθώσεων ακτινοβολίας, που εμπεριέχονται στον τελεστή $\Sigma(p)$, είναι η μετατόπιση του πόλου του φερμιονικού διαδότη απ΄ την τιμή m_0 στην τιμή $m_0 + \Sigma(p)$. Θυμούμαινοι ότι η θέση του πόλου του ελεύθερου διαδότη προσδιορίζει τη μάζα του γυμνού σωματιδίου, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η θέση του πόλου του ακριβή διαδότη καθορίζει τη φυσική μάζα του σωματιδίου.[7] Έτσι, ορίζουμε τη **μετατόπιση μάζας** (mass shift) μέσω της σχέσης

$$\delta m = m - m_0 = \left[\Sigma(\not{p})\right]_{\not{p}=m} . \tag{2.71}$$

Εισάγοντας τώρα τους μετασχηματισμούς Fourier του ακριβή φωτονικού διαδότη

$$D_{\mu\rho}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int D_{\mu\rho}(k)\mathrm{e}^{-ik(x-y)}dk, \tag{2.72}$$

του τελεστή πόλωσης κενού

$$\Pi^{\mu\nu}(x',z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \Pi^{\mu\nu}(k')\mathrm{e}^{-ik'(x'-z)}dk' \tag{2.73}$$

και του ελεύθερου φωτονικού διαδότη

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \left[g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right]\frac{-\mathrm{e}^{-iq(x-y)}}{q^2 - i\epsilon}dq \tag{2.74}$$

κι αντικαθιστώντας στη (2.42), παίρνουμε

$$D^{\mu\nu}(k) = D_F^{\mu\nu}(k) + D_F^{\mu\rho}(k)\Pi_{\rho\sigma}(k)D_F^{\sigma\nu}(k). \tag{2.75}$$

Η Εξ. (2.75) ονομάζεται **ανάπτυγμα Dyson** της εξίσωσης SD του φωτονικού διαδότη. Η διαγραμματική της αναπαράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.6.

Σχήμα 2.6. Το ανάπτυγμα Dyson του φωτονικού διαδότη

Οι μόνες τανυστικές ποσότητες απ΄ τις οποίες μπορεί να εξαρτάται ο $\Pi^{\mu\nu}(k)$ είναι οι $g^{\mu\nu}$ και $k^\mu k^\nu$ [12]. Απ΄ την ταυτότητα του Ward γνωρίζουμε όμως ότι $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$, οπότε ο $\Pi^{\mu\nu}(k)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -k^2\left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]\Pi(k^2). \tag{2.76}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.76) στη (2.75) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Ward, σύμφωνα με την οποία οι ποσότητες που είναι ανάλογες στα k^μ,k^ν μηδενίζονται, παίρνουμε[8]

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2\left[1+\Pi\left(k^2\right)\right]}. \tag{2.77}$$

[7] Η φυσική μάζα του σωματιδίου είναι αυτή που μετράμε πειραματικά.

[8] Παρατηρούμε ότι εφόσον το $\Pi(k^2)$ είναι ομαλό στο $q^2 = 0$, ο ακριβής φωτονικός διαδότης παρουσιάζει πόλο στο $q^2 = 0$ (δηλ. το φωτόνιο παραμένει άμαζο) σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών.

Ορίζοντας[9]

$$\frac{1}{1+\Pi(0)} \equiv \mathcal{G}, \tag{2.78}$$

παρατηρούμε ότι σε μια διαδικασία σκέδασης, η αντικατάσταση του ελεύθερου φωτονικού διαδότη απ΄ τον ακριβή διαδότη θα οδηγήσει στην αντικατάσταση $e \to \sqrt{\mathcal{G}}e$. Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα των διορθώσεων ακτινοβολίας απ΄ το φαινόμενο της πόλωσης του κενού μεταβάλλει την ενεργό (effective) ισχύ της αλληλεπίδρασης και το φυσικό φορτίο. Η μετατόπιση φορτίου (charge shift) ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\delta\mathcal{G} = \frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \left[\Pi\left(k^2\right)\right]_{k^2=0}. \tag{2.79}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις για τους ακριβείς διαδότες περιέχουν μη προσδιορίσιμες σταθερές όπως το γυμνό φορτίο e_0 κι η γυμνή μάζα m_0. Καθώς οι διαδότες υπεισέρχονται άμεσα στον υπολογισμό φυσικά παρατηρίσιμων μεγεθών (όπως πχ η ενεργός διατομή), θα πρέπει να είναι ανεξάρτητοι από τέτοιες μη μετρήσιμες σταθερές. Η διαδικασία που ακολουθούμε για να εκφράσουμε τις βασικές σχέσεις της θεωρίας μας μέσω των φυσικών ποσοτήτων m, e, α (γνωστή ως διαδικασία επανακανονικοποίησης) θα γίνει μη-διαταρακτικά και συνεπώς θα ισχύει σε όλες τις τάξεις τις θεωρίας διαταραχών.[10]
Αναπτύσσοντας τον $\Pi(k^2)$ σε σειρά Taylor γύρω απ΄ το σημείο $k^2 = 0$ κι ορίζοντας την ποσότητα

$$\left[\Pi(k^2)\right]_{k^2=0} \equiv \Pi_0, \tag{2.80}$$

παίρνουμε

$$\Pi(k^2) = \Pi_0 + \Pi_r(k^2). \tag{2.81}$$

Παρατηρούμε ότι $\Pi(0) = \Pi_0$, οπότε η (2.78) δίνει $\mathcal{G} = (1+\Pi_0)^{-1}$. Αντικαθιστώντας στη (2.77), παίρνουμε

$$D^{\mu\nu}(k^2) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2\left[1+\Pi_0+\Pi_r(k^2)\right] - i\epsilon} = -\mathcal{G}\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + k^2\mathcal{G}\Pi_r(k^2) - i\epsilon}. \tag{2.82}$$

Για πραγματικά φωτόνια, $k^2 \to 0$, οπότε οι όροι $\Pi_r(k^2)$ στο ανάπτυγμα Taylor του $\Pi(k^2)$ θα μηδενίζονται, συνεπώς η (2.82) παίρνει τη μορφή

$$D^{\mu\nu}(k^2) \sim \mathcal{G}\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}. \tag{2.83}$$

Συγκρίνοντας τη (2.83) με την εξίσωση του ελεύθερου φωτονικού διαδότη (1.52), παρατηρούμε ότι κοντά στο κέλυφος μάζας ($k^2 \to 0$) ο ακριβής φωτονικός διαδότης διαφέρει απ΄ τον ελεύθερο διαδότη μόνο κατά τον παράγοντα $\mathcal{G}$. Ο παράγοντας αυτός ορίζεται ως η **σταθερά επανακανονικοποίησης του φωτονικού πεδίου** και ισούται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του ακριβή φερμιονικού διαδότη στο $k^2 = 0$.
Με την ίδια λογική, αναπτύσσουμε τον τελεστή $\Sigma(\not p)$ σε σειρά Taylor γύρω απ΄ το σημείο $\not p = m$. Ορίζοντας

$$\Sigma_0 \equiv \left[\Sigma(\not p)\right]_{\not p=m} \quad , \quad \Sigma_1 \equiv \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial \not p}\right]_{\not p=m}, \tag{2.84}$$

έχουμε

$$\Sigma(\not p) = \Sigma_0 + (\not p - m)\Sigma_1 + \Sigma_r(\not p). \tag{2.85}$$

Απ΄ την Εξ. (2.71) έχουμε $\Sigma_0 = \delta m$, οπότε αντικαθιστώντας τη (2.85) στη (2.70), παίρνουμε

$$G(\not p) = \frac{1}{\not p - m_0 - \Sigma_0 - (\not p - m)\Sigma_1 - \Sigma_r(\not p) - i\epsilon} = \frac{1}{(\not p - m)(1-\Sigma_1) - \Sigma_r(\not p) - i\epsilon}. \tag{2.86}$$

[9] Βλ. [7, 38]

[10] Το γεγονός ότι μια τέτοια διαδικασία επανακανονικοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις τάξεις τις θεωρίας διαταραχών οφείλεται αποκλειστικά στη δομή της αλληλεπίδρασης $\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu$ (βλ. [7]).

Ορίζοντας [7, 38]

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{1-\Sigma_1}, \tag{2.87}$$

η (2.86) γίνεται

$$G(\not{p}) = \frac{\mathcal{F}}{\not{p} - m - \mathcal{F}\Sigma_r(\not{p}) - i\epsilon}. \tag{2.88}$$

Κοντά στον πόλο $\not{p} = m$ οι όροι $\Sigma_r(\not{p})$ μηδενίζονται, οπότε η (2.88) γίνεται

$$G(\not{p}) \sim \mathcal{F}\frac{1}{\not{p} - m - i\epsilon}. \tag{2.89}$$

Παρατηρούμε ότι ο ακριβής φερμιονικός διαδότης διαφέρει απ΄ τον ελεύθερο διαδότη (1.47) μόνο ως προς τον παράγοντα $\mathcal{F}$. Ο παράγοντας αυτός είναι η **σταθερά επανακανονικοποίησης του φερμιονικού πεδίου** και ισούται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του ακριβή φερμιονικού διαδότη στο σημείο $\not{p} = m$.

2.4 Το σύστημα $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Εξ. (2.60) με $G^{-1}(y, y')$, ολοκληρώνοντας ως προς dy' κι αντικαθιστώντας στην τελική εξίσωση το y' με y παίρνουμε

$$G^{-1}(x,y) = (i\not{\partial} - m_0)\delta(x-y) - ie^2\gamma^\mu \int dzduD_{\mu\nu}(x,z)\Gamma^\nu(z,u,y)G(x,u) \tag{2.90}$$

και παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier της (2.90) καταλήγουμε στη

$$G^{-1}(p) = \not{p} - m_0 - \Sigma(p), \tag{2.91}$$

όπου

$$\Sigma(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma^\mu D_{\mu\nu}(k-p)\Gamma^\nu(k,p)G(k). \tag{2.92}$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (2.65) με $[D^{\nu\rho}(y, y')]^{-1}$, ολοκληρώνοντας ως προς dy' και κάνοντας την αντικατάσταση $y' \to y$ στην εξίσωση που προκύπτει παίρνουμε

$$[D^{\mu\nu}(x,y)]^{-1} = \left[\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\delta(x-y) + iN_f e^2 \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \int dx'dx''G(x,x')\Gamma^\nu(x',x'',y)G(x'',x)\right]. \tag{2.93}$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier της (2.93) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$[D^{\mu\nu}(q)]^{-1} = -q^2\left[g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right] + \Pi^{\mu\nu}(q), \tag{2.94}$$

με

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{iN_f e^2}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\int d^4kG(k)\Gamma^\nu(k,k-q)G(k-q)\right]. \tag{2.95}$$

Απ΄ την Εξ. (2.76) βλέπουμε ότι μπορούμε να απομονώσουμε τη βαθμωτή συνάρτηση πόλωσης κενού $\Pi(q^2)$ δρώντας με τον προβολικό τελεστή $\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - nq_\mu q_\nu$ στον τανυστή πόλωσης κενού $\Pi^{\mu\nu}(q)$. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}(q) = -3q^2\Pi(q^2). \tag{2.96}$$

Δρώντας με τον τελεστή $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ στη (2.95) και χρησιμοποιώντας τη (2.96) παίρνουμε

$$\Pi(q^2) = -\frac{iN_f e^2\mathcal{P}_{\mu\nu}}{3q^2(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\int d^4kG(k)\Gamma^\nu(k,p)G(p)\right]. \tag{2.97}$$

οπότε χρησιμοποιώντας τη (2.78)[11] καταλήγουμε τελικά στη

$$\boxed{\frac{1}{\mathcal{G}(q^2)} = 1 - \frac{iN_f e^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}}{3q^2(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \int d^4k G(k) \Gamma^\nu(k,p) G(p)\right]} \tag{2.98}$$

Απ' την Εξ. (2.89) βλέπουμε ότι ο ακριβής φωτονικός διαδότης μπορεί να γραφτεί στη μορφή[12]

$$G(\not{p}) = \frac{\mathcal{F}(p^2)}{\not{p} - \mathcal{M}(p^2)} = \frac{\mathcal{F}(p^2)}{p^2 - \mathcal{M}^2(p^2)} \left(\not{p} + \mathcal{M}(p^2)\right), \tag{2.99}$$

όπου

$$\mathcal{M}(p^2) = m_0 + \Sigma(p^2) \tag{2.100}$$

η **εξίσωση μάζας** του φερμιονίου[13]. Παρατηρούμε ότι σε μηδενική τάξη της θεωρίας διαταραχών (δηλ. για ελεύθερα μη-αλληλεπιδρώντα φερμιόνια) η εξίσωση μάζας γίνεται $\mathcal{M}(p^2) = m_0$, δηλ. η μάζα του φερμιονίου ταυτίζεται με τη γυμνή μάζα κι η δυναμική μάζα ($\Sigma(p^2)$) μηδενίζεται. Σε περίπτωση που υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, η εξίσωση μάζας αποκτά ένα επιπλέον δυναμικό κομμάτι που οφείλεται στις διορθώσεις ακτινοβολίας (ιδιοενέργεια φερμιονίου). Αντικαθιστώντας τώρα τη (2.99) στη (2.91) παίρνουμε

$$\frac{\not{p} - \mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = \not{p} - m_0 - \Sigma(p). \tag{2.101}$$

Παίρνοντας το ίχνος της Εξ. (2.101) και διαιρώντας με -4, καταλήγουμε στη

$$\boxed{\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = m_0 + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\Sigma(p)\right]}, \tag{2.102}$$

ενώ πολλαπλασιάζοντας τη (2.101) με $\not{p}$, παίρνοντας το ίχνος και διαιρώντας με $4p^2$, καταλήγουμε στη

$$\boxed{\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} = 1 - \frac{1}{4p^2}\mathrm{Tr}\left[\not{p}\Sigma(p)\right]} \tag{2.103}$$

[11]Για την ακρίβεια εδώ χρησιμοποιούμε το γενικότερο ορισμό $\mathcal{G}(q^2) \equiv \frac{1}{1+\Pi(q^2)}$, όπου η $\mathcal{G}$ δεν είναι σταθερά, αλλά εξαρτάται από το q^2.

[12]Εδώ πάλι χρησιμοποιούμε το γενικότερο ορισμό $\mathcal{F}(p^2) \equiv \frac{1}{1-\Sigma_1(p^2)}$, όπου η $\mathcal{F}$ είναι συνάρτηση του p^2.

[13]Η Εξ. (2.100) απαντάται στη βιβλιογραφία κι ως εξίσωση χάσματος (gap equation).

Κεφαλαιο 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΘΡΑΥΣΗ ΤΗΣ ΧΕΙΡΑΛΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ QED

Στο προηγούμενο κεφάλαιο καταλήξαμε σε ένα σύστημα εξισώσεων (2.98),(2.102),(2.103), το οποίο είναι μη-διαταρακτικό και περικλείει όλη τη δυναμική της θεωρίας. Συνεπώς αποτελεί ένα σημείο εκκίνησης για τη μελέτη φαινομένων, τα οποία δεν είναι προσβάσιμα μέσω της θεωρίας διαταραχών που παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Παρόλα αυτά, καθώς το σύστημα αυτό αποτελείται από μια απειρία πεπλεγμένων μη-γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, η επίλυσή του στη γενική μορφή είναι αδύνατη. Αυτό μας αναγκάζει να καταφύγουμε σε διάφορα σχήματα περικοπής (truncation schemes), τα οποία περιορίζουν τον αριθμό των εξισώσεων του συστήματος[1].
Στο κεφάλαιο αυτό θα στηριχθούμε στο πιο απλό σχήμα περικοπής, την προσέγγιση γυμνής κορυφής (bare vertex approximation), και θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία διακλαδώσεων, για να μελετήσουμε το φαινόμενο της δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας στην 4-διάστατη QED. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η μετάβαση φάσης οδηγεί σε ένα μη-τετριμμένο διάγραμμα φάσης, το οποίο εκτός των άμεσων εφαρμογών σε υπερκρίσιμα ηλεκτροδυναμικά πεδία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη ανάλογων φαινομένων σε μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας όπως η Κβαντική Χρωμοδυναμική.

3.1 Δυναμική παραγωγή μάζας στην QED με σβέση

Η **προσέγγιση γυμνής κορυφής** συνίσταται στην αντικατάσταση της πλήρους 3-σημειακής συνάρτησης κορυφής απ΄ τη γυμνή κορυφή:

$$\Gamma^{\mu}(x', x'', z) \to \gamma^{\mu}. \tag{3.1}$$

Η αντικατάσταση αυτή οδηγεί στην περικοπή των $n-$σημειακών συναρτήσεων συσχέτισης που εμπλέκονται στο σύστημα $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, για $n > 2$. Ένας επιπλέον περιορισμός του αριθμού των εξισώσεων του συστήματος μπορεί να επιτευχθεί στη λεγόμενη **προσέγγιση σβέσης** (quenched approximation). Η προσέγγιση αυτή λαμβάνεται μηδενίζοντας τον αριθμό των φερμιονικών βρόγχων:

$$N_f = 0, \tag{3.2}$$

δηλαδή αγνοώντας το φαινόμενο της πόλωσης του κενού. Στην περίπτωση αυτή, απ΄ τις Εξ. (2.98),(2.83), φαίνεται ότι ο πλήρης φωτονικός διαδότης αντικαθίσταται απ΄ τον ελεύθερο διαδότη

$$D_{\mu\nu}(q) \to D^F_{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]. \tag{3.3}$$

[1] Τα σχήματα περικοπής περιορίζουν τον υπολογισμό σε ένα πλήθος από άπειρα, τοπολογικά όμοια διαγράμματα Feynman, συνεπώς αποτελούν μια μη-διαταρακτική προσέγγιση της θεωρίας

Ο συνδυασμός των προσεγγίσεων γυμνής κορυφής και σβέσης, ονομάζεται **προσέγγιση ίριδας** (rainbow approximation), από τη χαρακτηριστική μορφή του τελεστή ιδιοενέργειας που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\Sigma(p) \ =$$

Ο τελεστής ιδιοενέργειας στην προσέγγιση ίριδας

Για να προσδιορίσουμε το σύστημα $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ στην προσέγγιση ίριδας, δουλεύουμε ως εξής. Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.2) στη (2.98) παίρνουμε

$$\mathcal{G} = 1. \tag{3.4}$$

Αντικαθιστώντας τον τελεστή ιδιοενέργειας απ΄ τη σχέση (2.92) στην Εξ. (2.102) και χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις (3.1) και (3.2), παίρνουμε:

$$\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = m_0 + \frac{ie^2}{4(2\pi)^4}\int d^4k \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu G(k)\gamma^\nu\right] D^F_{\mu\nu}(k-p). \tag{3.5}$$

Αντικαθιστώντας την ακριβή έκφραση των διαδοτών απ΄ τις σχέσεις (2.99) και (3.3) και θέτοντας $q = k - p$, παίρνουμε

$$\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = m_0 - \frac{ie^2}{4(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2 - \mathcal{M}^2(k^2)} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \left(\not{k} + \mathcal{M}(k^2)\right)\gamma^\nu\right]\frac{1}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]. \tag{3.6}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] &= 4g^{\mu\nu} \\ \mathrm{Tr}\left[\not{k}_1 \ldots \not{k}_n\right] &= 0 \quad , \quad n \text{ περιττό}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

οπότε

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \left(\not{k} + \mathcal{M}(k^2)\right)\gamma^\nu\right] = \mathcal{M}(k^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] = 4g^{\mu\nu}\mathcal{M}(k^2). \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας την (3.8) στην (3.6), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} &= m_0 - \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(k^2)}{k^2 - \mathcal{M}^2(k^2)}\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right] \\ &= m_0 - \frac{ie^2}{(2\pi)^4}(3+\xi)\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(k^2)}{k^2 - \mathcal{M}^2(k^2)}\frac{1}{q^2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Πραγματοποιούμε στη συνέχεια μια περιστροφή Wick, η οποία συνίσταται στην αντικατάσταση $k_0 \to ik_0$. Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει τον χώρο Minkowski σε Ευκλείδειο, καθώς η ποσότητα $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2$ μετατρέπεται στην $-k^2 = -(k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$. Στο χώρο Minkowski, η μάζα ενός πεδίου ορίζεται ως ο πόλος του αντίστοιχου διαδότη. Απ΄ την Εξ. (2.99) παρατηρούμε ότι ο πόλος του φερμιονικού διαδότη εμφανίζεται στη χρονοειδή ορμή m^2 που ικανοποιεί την εξίσωση $m^2 = \mathcal{M}^2(m^2)$. Μετά την περιστροφή Wick, η μάζα του φερμιονικού πεδίου θα δίνεται απ΄ την εξίσωση $m^2 = -p_E^2 = \mathcal{M}^2(-p_E^2)$, η οποία θα ικανοποιείται για αρνητικές τιμές της Ευκλείδειας ορμής p_E. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην Εξ. (3.9), παίρνουμε

$$\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = m_0 + \frac{(3+\xi)e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(k^2)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k^2)}\frac{1}{q^2}. \tag{3.10}$$

Εισάγοντας τώρα τις σφαιρικές συντεταγμένες [38]

$$\begin{aligned} k_0 &= k\cos\theta \\ k_1 &= k\sin\theta\cos\phi \\ k_2 &= k\sin\theta\sin\phi\cos\psi \\ k_3 &= k\sin\theta\sin\phi\sin\psi, \end{aligned} \tag{3.11}$$

όπου $k=\sqrt{k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2}$, έχουμε $d^4k=k^3\sin^2\theta\sin\phi\, dk\, d\theta\, d\phi\, d\psi$, με $k\in[0,\infty]$, $\theta,\phi\in[0,\pi]$ και $\psi\in[0,2\pi]$, πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση στην (3.10) και παίρνουμε[2]

$$\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = m_0 + \frac{a(3+\xi)}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{k^2}{p^2}\theta(p^2-k^2)+\theta(k^2-p^2)\right], \tag{3.12}$$

όπου $a=\frac{e^2}{4\pi}$ και Λ^2 μια ορμή αποκοπής. Τέλος θα βρούμε την έκφραση της Εξ. (2.103) στην προσέγγιση ίριδας. Αντικαθιστώντας τις (2.92), (2.99) στη (2.103), παίρνουμε

$$\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} = 1 - \frac{1}{4p^2}\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2-\mathcal{M}^2(k^2)} \mathrm{Tr}\left[\not{p}\gamma^\mu\left(\not{k}+\mathcal{M}(k^2)\right)\gamma^\nu\right] D^F_{\mu\nu}(q). \tag{3.13}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.7) και το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[\not{k}\not{p}\right] &= 4k.p \\ \mathrm{Tr}\left[\not{k}_1\not{k}_2\not{k}_3\not{k}_4\right] &= 4\left[(k_1.k_2)(k_3.k_4)-(k_1.k_3)(k_2.k_4)+(k_1.k_4)(k_2.k_3)\right], \end{aligned} \tag{3.14}$$

κι αντικαθιστώντας την έκφραση του φωτονικού διαδότη απ' την (3.3), η (3.13) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} &= 1 - \frac{ie^2}{p^2(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2-\mathcal{M}^2(k^2)}\left(p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu - k.p\, g^{\mu\nu}\right)\left\{-\frac{1}{q^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]\right\} \\ &= 1 - \frac{e^2}{p^2(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{q^2\left(k^2+\mathcal{M}^2(k^2)\right)}\left[2\frac{k^2p^2-(k.p)^2}{q^2} - 3k.p\right. \\ &+ \left.\xi\,\frac{(k^2+p^2)k.p-2k^2p^2}{q^2}\right], \end{aligned} \tag{3.15}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε εκτελέσει μια περιστροφή Wick. Εισάγοντας τους μετασχηματισμούς (3.11) κι εκτελώντας τις ολοκληρώσεις[3], παίρνουμε

$$\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} = 1 + \frac{a\xi}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{k^4}{p^4}\theta(p^2-k^2)+\theta(k^2-p^2)\right]. \tag{3.16}$$

3.1.1 Προσδιορισμός της κρίσιμης σταθεράς ζεύξης και του νόμου βάθμισης

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε αναλυτικά την κρίσιμη σταθερά ζεύξης a_c που σηματοδοτεί το πέρασμα απ' τη συμμετρική στη μη-συμμετρική φάση της θεωρίας καθώς και το νόμο βάθμισης της δυναμικής μάζας. Ο υπολογισμός θα γίνει στη βαθμίδα Landau ($\xi=0$).[4] Θέτοντας $\xi=0$ στην Εξ. (3.16), παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{F}(p^2) = 1 \tag{3.17}$$

στη βαθμίδα Landau. Θα δούμε στη συνέχεια ότι η (3.17) είναι μια καλή προσέγγιση σε όλες τις συναλλοίωτες βαθμίδες στα πλαίσια της προσέγγισης ίριδας. Απ' τη σχέση (3.4) παρατηρούμε επίσης ότι η σταθερά

[2] Για την απόδειξη της Εξ. (3.12) βλ. Παράρτημα Β'.

[3] Βλ. Παράρτημα Β'.

[4] Οι συνέπειες της συγκεκριμένης επιλογής βαθμίδας θα συζητηθούν αναλυτικά στην Ενότητα 3.1.3.

επανακανονικοποίησης του φωτονικού πεδίου είναι ίση με τη μονάδα, συνεπώς στην προσέγγιση ίριδας δε θα πρέπει να υπάρχει κίνηση (running) της σταθεράς ζεύξης. Αυτό είναι αναμενόμενο από φυσικής άποψης, καθώς η κίνηση της σταθεράς ζεύξης προκύπτει απ΄ το φαινόμενο της πόλωσης κενού, το οποίο εξ΄ ορισμού παραλείπεται στην προσέγγιση σβέσης. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει στη φάση ισχυρής ζεύξης της θεωρίας.
Η εξίσωση χάσματος (3.12) παίρνει τελικά τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p^2) &= m_0 + \frac{3a}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{k^2}{p^2}\theta(p^2-k^2)+\theta(k^2-p^2)\right] \\ &= m_0 + \frac{3a}{4\pi}\left[\frac{1}{p^2}\int_0^{p^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)} + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\right]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Η Εξ. (3.18) είναι μια μη-γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hammerstein. Η κρίσιμη σταθερά ζεύξης a_c σηματοδοτεί το πέρασμα απ΄ τη χειραλικά συμμετρική στη μη-συμμετρική φάση της θεωρίας κι αποτελεί μια μη-τετριμμένη λύση (ένα σημείο διακλάδωσης) της Εξ. (3.18) [39]. Ο υπολογισμός της a_c μπορεί να γίνει αναλυτικά, αναγόμενος στην εύρεση του φάσματος ιδιοτιμών της γραμμικοποιημένης μορφής της Εξ. (3.18)[5] [40–42].
Παίρνοντας την παράγωγο Fréchet των ολοκληρωτέων ποσοτήτων στην (3.18) ως προς $\mathcal{M}(k^2)$, έχουμε

$$\mathcal{M}(p^2) = m_0 + \frac{3a}{4\pi}\left[\frac{1}{p^2}\int_{\kappa^2}^{p^2} dk^2 \mathcal{M}(k^2) + \int_{p^2}^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\mathcal{M}(k^2)}{k^2}\right], \tag{3.19}$$

όπου έχουμε εισάγει μια υπέρυθρη ορμή αποκοπής κ^2, για να διατηρήσουμε την κλίμακα της παραγόμενης δυναμικής μάζας. Όπως είδαμε παραπάνω οι σταθερές επανακανονικοποίησης που συνδέονται με τα φερμιονικά και φωτονικά πεδία $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ είναι ίσες με τη μονάδα στην προσέγγιση ίριδας, άρα λόγω της ταυτότητας Ward η σταθερά επανακανονικοποίησης της συνάρτησης κορυφής (Z_1) θα είναι επίσης ίση με τη μονάδα [6]. Αυτό σημαίνει ότι οι μόνες απειρίες που θα εμφανίζονται στη θεωρία διαταραχών θα οφείλονται στην επανακανονικοποίηση της φερμιονικής μάζας $m_0 = Z_m m$. Συνεπώς, στο χειραλικό όριο $(m_0 \to 0)$ η θεωρία θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κλίμακας. Η αναλλοιότητα αυτή θα έπρεπε με τη σειρά της να εκφράζεται μέσω της ύπαρξης dilaton πολλαπλετών (στη περίπτωση που η αναλλοιότητα κλίμακας είναι ακριβής) ή μέσω της ύπαρξης μποζονίων Nambu-Goldstone (στην περίπτωση που η αναλλοιότητα κλίμακας θραύεται αυθόρμητα). Καθώς κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στο φάσμα της QED, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αναλλοιότητα κλίμακας πρέπει να θραύεται εκπεφρασμένα. Ο όρος κ^2 στην (3.19) επιτελεί αυτό τον σκοπό, δηλ. θραύει εκπεφρασμένα την αναλλοιότητα κλίμακας, θέτοντας την κλίμακα της παραγόμενης δυναμικής μάζας μέσω της σχέσης $\mathcal{M}(\kappa^2) = \kappa$ [30,38,43]. Παραγωγίζοντας την (3.19) ως προς p^2, παίρνουμε

$$\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2} = -\frac{3a}{4\pi}\frac{1}{p^2}\int_{\kappa^2}^{p^2} dk^2 \mathcal{M}(k^2). \tag{3.20}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της (3.20) με p^2 και παραγωγίζοντας ξανά ως προς p^2, καταλήγουμε στην

$$(p^2)^2\frac{d^2\mathcal{M}(p^2)}{d(p^2)^2} + 2p^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2} + \frac{3a}{4\pi}\mathcal{M}(p^2) = 0, \tag{3.21}$$

[5] Για μια γενική συζήτηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Hammerstein και για μια αναλυτικότερη παρουσίαση της θεωρίας διακλαδώσεων, βλ. Παράρτημα Δ΄.
[6] Βλ. [11, 12].

με τις συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{p^2\to\kappa^2}\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2} = 0, \tag{3.22}$$

$$\lim_{p^2\to\Lambda^2}\left[p^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}+\mathcal{M}(p^2)\right] = m_0. \tag{3.23}$$

Η Εξ. (3.21) έχει ως λύσεις συναρτήσεις της μορφής

$$\mathcal{M}(p^2) = (p^2)^{-s}. \tag{3.24}$$

Αντικαθιστώντας την (3.24) στην (3.21) παίρνουμε

$$s^2 - s + \frac{3a}{4\pi} = 0, \tag{3.25}$$

απ΄ όπου προσδιορίζεται η κρίσιμη σταθερά ζεύξης:

$$\boxed{a_c = \frac{\pi}{3}}. \tag{3.26}$$

Η γενική λύση παίρνει τη μορφή[7]

$$\begin{cases} \mathcal{M}(p^2) = C_1\cdot(p^2)^{-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} + C_2\cdot(p^2)^{-\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2}}, & \text{αν } a<a_c \\ \mathcal{M}(p^2) = C_1\cdot(p^2)^{-\frac{1}{2}} + C_2\cdot(p^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } a=a_c \\ \mathcal{M}(p^2) = C_1\cdot(p^2)^{-\frac{1}{2}-\frac{i\tau}{2}} + C_2\cdot(p^2)^{-\frac{1}{2}+\frac{i\tau}{2}}, & \text{αν } a>a_c, \end{cases} \tag{3.27}$$

όπου $\sigma = \sqrt{1-\frac{a}{a_c}}$, $\tau = \sqrt{\frac{a}{a_c}-1}$. Αντικαθιστώντας τις συνοριακές συνθήκες (3.22) και (3.23) στην (3.27) παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1(-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2})\kappa^{-\sigma} + C_2(-\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2})\kappa^{\sigma} &=& 0 \\ C_1(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2})\Lambda^{-\sigma} + C_2(\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2})\Lambda^{\sigma} &=& m_0 \end{array}\right\} \quad a<a_c, \tag{3.28}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}C_1\kappa^{-3} + \frac{1}{2}C_2\kappa^{-1} &=& 0 \\ \frac{1}{2}C_1\Lambda^{-1} + \frac{3}{2}C_2\Lambda &=& m_0 \end{array}\right\} \quad a=a_c, \tag{3.29}$$

και

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1(-\frac{1}{2}-\frac{i\tau}{2})\kappa^{-i\tau} + C_2(-\frac{1}{2}+\frac{i\tau}{2})\kappa^{i\tau} &=& 0 \\ C_1(\frac{1}{2}-\frac{i\tau}{2})\Lambda^{-i\tau} + C_2(\frac{1}{2}+\frac{i\tau}{2})\Lambda^{i\tau} &=& m_0 \end{array}\right\} \quad a>a_c. \tag{3.30}$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (3.28), (3.29) δε διαθέτουν μη-μηδενικές λύσεις για $m_0 = 0$, ενώ απ΄ την (3.30) παίρνουμε

$$\left(\frac{\Lambda}{\kappa}\right)^{2i\tau} = \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i\tau}{2})^2}{(\frac{1}{2}+\frac{i\tau}{2})^2} = \frac{r^2\mathrm{e}^{-2i\theta}}{r^2\mathrm{e}^{2i\theta}} = \mathrm{e}^{-4i\theta}, \tag{3.31}$$

όπου $r = \frac{1}{2}\sqrt{1+\tau^2}$ και $\theta = \arctan\tau$. Απ΄ τη σχέση (3.31) παίρνουμε

$$\ln\left(\frac{\Lambda}{\kappa}\right) = -\frac{2\arctan\tau}{\tau} + \frac{k\pi}{\tau} \simeq \frac{k\pi}{\tau} - 2, \quad k = 1,2,\dots \tag{3.32}$$

[7] Στο εξής το a θα συμβολίζει τη γυμνή σταθερά ζεύξης και το a_R την επανακανονικοποιημένη, εκτός κι αν δηλώνεται κάπου ρητά διαφορετικός συμβολισμός.

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε πάρει το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης ($\arctan\tau$) για $\tau \to 0$ ($a \to a_c$). Επειδή το ευσταθές κενό της θεωρίας αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της παραγόμενης μάζας[8] (κ), απ΄ την (3.32) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\Lambda}{\kappa} = \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{\frac{a}{a_c}-1}} - 2\right). \tag{3.33}$$

Ο νόμος

$$\boxed{\frac{\Lambda}{m} = \exp\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{a}{a_c}-1}} - B\right)} \tag{3.34}$$

ονομάζεται **βάθμιση Miransky** [45]. Παρατηρούμε συνεπώς, ότι η προσέγγιση ίριδας στη βαθμίδα Landau οδηγεί σε βάθμιση Miransky για την παραγόμενη φερμιονική μάζα με $A = \pi$ και $B = 2$. Η γραμμικοποίηση με ισχυρή αποκοπή (hard cutoff) που χρησιμοποιήσαμε δεν προσεγγίζει καλά τη συμπεριφορά της εξίσωσης χάσματος (3.18) στο όριο $p^2 \to 0$. Μια γραμμικοποίηση που προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική συμπεριφορά της αρχικής μη-γραμμικής εξίσωσης (3.18) σε όλο τον Ευκλείδειο χώρο [46,47] λαμβάνεται μέσω της αντικατάστασης $\mathcal{M}^2(p^2=0) = m^2$. Η γραμμικοποίηση αυτή δίνει $a_c = \frac{\pi}{3}$ και οδηγεί σε βάθμιση Miransky με $A = \pi$ και $B = 2\ln 2$.[9] Σημειώνουμε ότι η αριθμητική επίλυση της (3.18) επιβεβαιώνει τα προηγούμενα αποτελέσματα [47].
Απ΄ τη σχέση (3.34) φαίνεται ότι η υπερκρίσιμη δυναμική εισάγει μια νέα μη-διαταρακτική απειρία που συνδέεται με τη δυναμική μάζα m_{dyn}. Η δυναμική μάζα (ή ισοδύναμα η υπεριώδης ορμή αποκοπής Λ που είναι ανάλογη της m_{dyn}) θραύει εκπεφρασμένα την αναλλοιότητα κλίμακας. Συνεπώς ακόμα και στην υπερκρίσιμη φάση, η QED δεν παρουσιάζει αναλλοιότητα κλίμακας στο χειραλικό όριο $m_0 \to 0$.

3.1.2 Η εξίσωση Bethe - Salpeter

Η εξίσωση Bethe - Salpeter αποτελεί μια γενίκευση της εξίσωσης Schwinger-Dyson για τη μελέτη της διάδοσης 2 σωματιδίων. Συνιστά επομένως το σημείο εκκίνησης για τη μελέτη του προβλήματος δέσμιων καταστάσεων. Η αυθόρμητη θραύση της χειραλικής συμμετρίας θα πρέπει σύμφωνα με το θεώρημα Goldstone να οδηγεί στην εμφάνιση άμαζων μποζονίων Nambu-Goldstone. Στην περίπτωση μάλιστα που η θραύση αυτή γίνεται δυναμικά (όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα), τα NG μποζόνια θα πρέπει να εμφανίζονται ως χειραλικά συμπυκνώματα $\bar{\psi}\psi$, δηλαδή ως δέσμιες καταστάσεις φερμιονίων-αντιφερμιονίων[10].
Η ενότητα αυτή έχει σκοπό να παρουσιάσει τις ιδιότητες των μποζονίων NG, όπως αυτές προκύπτουν απ΄ την ανάλυση της εξίσωσης Bethe - Salpeter[11].
Η κυματοσυνάρτηση Bethe - Salpeter μιας ψευδοβαθμωτής δέσμιας κατάστασης $|P,r\rangle$, η οποία αποτελείται από ένα φερμιόνιο a κι ένα αντιφερμιόνιο b, με ορμή P, είναι

$$\chi^{(p)}_{ab;r}(x,y) = \langle 0|T\{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|P,r\rangle. \tag{3.35}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της (3.35) δίνεται απ΄ την έκφραση

$$\chi^{(p)}_{ab}(x,y) = \mathrm{e}^{-iPX}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-iq(x-y)}\chi^{(p)}_{ab}(q,P), \tag{3.36}$$

[8]Η μεγαλύτερη τιμή της παραγόμενης μάζας αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή της ενέργειας κενού και συνεπώς ορίζει την κατάσταση κενού που πραγματοποιείται στη φύση [44].
[9]Βλ. Παράρτημα Β΄
[10]Βλ. Ενότητα 1.5.2
[11]Χάριν συντομίας θα παραλείψουμε τη διαδικασία εξαγωγής της εξίσωσης Bethe - Salpeter και τις μαθηματικές αποδείξεις. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [7,30,48] για μια πιο αυστηρή παρουσίαση.

όπου $X = \frac{m_a x + m_b y}{m_a + m_b}$ και m_a, m_b, οι γυμνές μάζες του φερμιονίου και του αντιφερμιονίου αντίστοιχα. Η κυματοσυνάρτηση BS ενός ψευδοβαθμωτού μποζονίου μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των πινάκων Dirac ως

$$\chi_{ab}^{(p)}(q,P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_{ab;1}^{(p)} + \chi_{ab;2}^{(p)}\hat{P} + \chi_{ab;3}^{(p)}\hat{q} + \chi_{ab;4}^{(p)}\sigma^{\mu\nu}\left(P_\mu q_\nu - P_\nu q_\mu\right)\right]\gamma_5, \tag{3.37}$$

ενώ η κυματοσυνάρτηση ενός βαθμωτού μποζονίου γράφεται ως

$$\chi_{ab}^{(s)}(q,P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_{ab;1}^{(s)} + \chi_{ab;2}^{(s)}\hat{P} + \chi_{ab;3}^{(s)}\hat{q} + \chi_{ab;4}^{(s)}\sigma^{\mu\nu}\left(P_\mu q_\nu - P_\nu q_\mu\right)\right] \tag{3.38}$$

στην ίδια βάση. Για άμαζα ψευδοβαθμωτά μποζόνια ($P^\mu = 0$) αποδεικνύεται ότι η εξίσωση BS για την κυματοσυνάρτηση (3.37) παίρνει τη μορφή [30]

$$\left(m_{dyn}^2 - q^2\right)\chi_{ab;1}^{(p)}(q^2) = \frac{ia(3+\xi^{-1})}{4\pi^3}\int \frac{d^4k}{(q-k)^2}\chi_{ab;1}^{(p)}(k^2), \tag{3.39}$$

όπου $m_a = m_b = m_{dyn}$. Με την αντικατάσταση

$$\begin{cases} \left(m_{dyn}^2 - q^2\right)\chi_{ab;1}^{(p)}(q^2) & \rightarrow & \mathcal{M}(q^2) \\ a(3+\xi^{-1}) & \rightarrow & 3a \end{cases}$$

η (3.39) μεταπίπτει στην Εξ. (Β΄.20) με $m_0 = 0$. Η γενική λύση της (3.39) είναι

$$\chi_{ab;1}^{(p)}(q^2) = C\left(q^2 + m_{dyn}^2\right)^{-1} F\left(\frac{1+\sigma(\xi)}{2}, \frac{1-\sigma(\xi)}{2}; 2; -\frac{q^2}{m_{dyn}^2}\right), \tag{3.40}$$

όπου F η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Για πεπερασμένο Λ, οι μη-τετριμμένες λύσεις της (3.39) υπάρχουν μόνο για

$$a > a_c(\xi) = \frac{\pi}{3+\xi^{-1}}. \tag{3.41}$$

Τότε ο αριθμός των λύσεων απειρίζεται κι η μάζα των αντίστοιχων καταστάσεων ορίζεται απ΄ τι σχέση

$$m_{dyn}^{(k)} \simeq 4\Lambda \exp\left(-\frac{k\pi}{\tau(\xi)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.42}$$

Για την περίπτωση $P^\mu \neq 0$, αποδεικνύεται ότι η εξίσωση BS για την κυματοσυνάρτηση (3.37) παίρνει τη μορφή [30]

$$\left(\frac{P^2}{2} + q^2 + m_a m_b\right)\chi_{ab;1}^{(p)}(P^2,q^2) = \frac{a}{\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2\left[\frac{\theta(q^2-k^2)}{q^2} + \frac{\theta(k^2-q^2)}{k^2}\right]k^2\chi_{ab;1}^{(p)}(P^2,k^2). \tag{3.43}$$

Με την αντικατάσταση

$$\frac{P^2}{2} + m_a m_b \rightarrow m_{dyn}^2,$$

η (3.43) μεταπίπτει στην (3.39) με $\xi = 1$, η οποία με τη σειρά της είναι ισοδύναμη της (Β΄.20). Συνεπώς η μάζα των ψευδοβαθμωτών μποζονίων NG θα προσδιορίζεται απ΄ την Εξ. (Β΄.35) με

$$\begin{cases} m_{dyn}^2 & \rightarrow & m_a m_b - \frac{M_{ab}^{(p)2}}{2} \\ M_{ab}^{(p)2} & = & -P^2 \\ \tau & \rightarrow & \tau(\xi=1) = \sqrt{\frac{4a}{\pi} - 1}, \end{cases}$$

δηλαδή θα δίνεται τελικά απ΄ τη σχέση

$$M^{(p)2}_{ab;k} = 2m_a m_b - 32\Lambda^2 \exp\left(\frac{-2k\pi}{\sqrt{\frac{4a}{\pi}-1}}\right), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.44}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (3.44) οδηγεί στην ύπαρξη ταχυονικών καταστάσεων με

$$M^{(p)2}_{ab;k} < 0$$

για $m_a = m_b = 0$ και $a > a_c$. Δηλαδή σε υπερκρίσιμες τιμές της σταθεράς ζεύξης, η χειραλικά συμμετρική φάση είναι ασταθής. Στην περίπτωση όπου $m_a = m_b = m_{dyn}$ και $a > a_c$, η χειραλική συμμετρία θα θραύεται δυναμικά και λόγω του θεωρήματος Goldstone, θα πρέπει να εμφανίζονται άμαζα μποζόνια NG που θα ικανοποιούν τη συνθήκη

$$M^{(p)2}_{ab;k} = 0 \Rightarrow m^{(k)2}_{dyn} = \frac{1}{2}\Lambda^2 f^{(k)}(a), \tag{3.45}$$

όπου

$$f^{(k)}(a) = 32 \exp\left(\frac{-2k\pi}{\sqrt{\frac{4a}{\pi}-1}}\right) \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.46}$$

Όπως φαίνεται απ΄ την Εξ. (3.44), μόνο η μεγαλύτερη τιμή της m_{dyn} που θα αντιστοιχεί σε $k = 1$ θα ορίζει ένα ευσταθές κενό. Οι υπόλοιπες καταστάσεις με $M^{(p)2}_{ab;i} = \Lambda^2 \left(f^{(k)}(a) - f^{(i)}(a)\right), k \geq 2$ θα παραμένουν ταχυονικές.
Η εξίσωση BS για άμαζα βαθμωτά μποζόνια ($m_a = m_b = 0$) ταυτίζεται με την εξίσωση BS για άμαζα ψευδοβαθμωτά μποζόνια, συνεπώς στη συμμετρική φάση με $a > a_c$ θα υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από βαθμωτά ταχυόνια. Η εξίσωση BS δεν μπορεί να λυθεί για την περίπτωση μαζικών βαθμωτών μποζονίων. Αποδεικνύεται όμως ότι η μάζα των βαθμωτών μποζονίων είναι μεγαλύτερη απ΄ τη μάζα των ψευδοβαθμωτών, πράγμα που οφείλεται στη μεγαλύτερη τροχιακή στροφορμή των βαθμωτών καταστάσεων ($l = 1$) σε σχέση με τις ψευδοβαθμωτές ($l = 0$)[12] [30].

3.1.3 Αναλλοιότητα βαθμίδας

Όπως είδαμε (Εξ. 3.41), η κρίσιμη σταθερά ζεύξης a_c στην προσέγγιση ίριδας εξαρτάται απ΄ την επιλογή βαθμίδας[13], κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την απαίτηση τα φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη να είναι αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Πρέπει επομένως να εξετάσουμε αν η παραπάνω ανάλυση δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα.
Είδαμε στην Ενότητα 1.4.1, ότι η αναλλοιότητα βαθμίδας εμπεριέχεται στις ταυτότητες WGT. Αν οι ταυτότητες αυτές ικανοποιούνται σε κάποια συγκεκριμένη βαθμίδα, οι μετασχηματισμοί Landau - Khalatnikov - Fradkin [49, 50] εξασφαλίζουν την ισχύ τους σε οποιαδήποτε άλλη βαθμίδα. Οι μετασχηματισμοί LKF είναι μη-διαταρακτικοί και περιγράφουν τον τρόπο μετασχηματισμού των συναρτήσεων συσχέτισης στις διάφορες συναλλοίωτες βαθμίδες.
Σημειώνουμε ότι στην QED στις $(2 + 1)$ διαστάσεις, οι μετασχηματισμοί LKF παίρνουν μια ιδιαίτερα απλή μορφή, οπότε στην περίπτωση της QED_3 αρκεί να βρούμε τις μη-τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης χάσματος στη βαθμίδα Landau και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς LKF, για να βρούμε τις λύσεις σε μια οποιαδήποτε συναλλοίωτη βαθμίδα [51, 52]. Στην περίπτωση των $(3+1)$ διαστάσεων όμως, η συνάρτηση μετασχηματισμού που αντιστοιχεί στην επιλογή βαθμίδας απειρίζεται, συνεπώς το παραπάνω πρόγραμμα περιπλέκεται αρκετά στην περίπτωση της QED_4 [29]. Παρόλα αυτά, ακόμα και

[12] Το γεγονός αυτό θα αναλυθεί με περισσότερη λεπτομέρεια στην Ενότητα 3.1.5.

[13] Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η προσέγγιση γυμνής κορυφής δεν ικανοποιεί την ταυτότητα Ward (Εξ. 1.88).

στην περίπτωση που οι ταυτότητες WGT ικανοποιούνται κατά προσέγγιση σε κάποια βαθμίδα, οι μετασχηματισμοί LKF εξασφαλίζουν την ικανοποίησή τους σε όλες τις συναλλοίωτες βαθμίδες, σε διαφορετικά σχήματα προσέγγισης [30].
Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Ward (Εξ. 1.88) για την περίπτωση της 3-σημειακής συνάρτησης συσχέτισης $\Gamma_\mu(q,k)$, έχουμε

$$(q-k)^\mu \Gamma_\mu(q,k) = -G^{-1}(q) + G^{-1}(k) \tag{3.47}$$

κι αντικαθιστώντας την έκφραση των ακριβών διαδοτών απ΄ την Εξ. (2.99), παίρνουμε

$$(q-k)^\mu \Gamma_\mu(q,k) = -\not{q}\frac{1}{\mathcal{F}(q^2)} + \not{k}\frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} + \frac{\mathcal{M}(q^2)}{\mathcal{F}(q^2)} - \frac{\mathcal{M}(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)}. \tag{3.48}$$

Στην προσέγγιση ίριδας έχουμε $\Gamma_\mu(q,k) = -\gamma_\mu$ και στη βαθμίδα Landau γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F} = 1$. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η ταυτότητα Ward ικανοποιείται στη βαθμίδα Landau στην προσέγγιση ίριδας μέχρις διορθώσεων της τάξης της συνάρτησης μάζας:

$$(q-k)^\mu(-\gamma_\mu) = \not{k} - \not{q} + \mathcal{O}\left(\mathcal{M}(q^2) - \mathcal{M}(k^2)\right). \tag{3.49}$$

Για $q^2 = k^2$ οι διορθώσεις της συνάρτησης μάζας μηδενίζονται, ενώ όπως φαίνεται απ΄ τις σχέσεις (3.27) και (Β΄.30)

$$\mathcal{M}(q^2) \sim (q^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.50}$$

στην περιοχή του κρίσιμου σημείου, δηλαδή οι διορθώσεις της συνάρτησης μάζας φθίνουν αρκετά γρήγορα με την αύξηση της ορμής. Συνεπώς περιμένουμε ότι μετασχηματίζοντας την εξίσωση χάσματος μέσω των μετασχηματισμών LKF, οι φυσικά παρατηρήσιμες ποσότητες θα παρουσιάζουν μικρή εξάρτηση απ΄ την επιλογή βαθμίδας. Πράγματι, όπως επιβεβαιώθηκε στο [53], η τιμή του a_c είναι περίπου ανεξάρτητη απ΄ την επιλογή βαθμίδας. Μια διαφορετική προσέγγιση για την εξασφάλιση της αναλλοιότητας βαθμίδας έγκειται στην κατασκευή πιο ρεαλιστικών προσεγγίσεων για τη μορφή της συνάρτησης κορυφής [54–56]. Τα αποτελέσματα απ΄ τις τελευταίες μελέτες καταδεικνύουν ότι η προσέγγιση ίριδας αναπαράγει σωστά τη φυσική εικόνα της δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας στην QED με σβέση.

3.1.4 Συνθήκες για την ύπαρξη λύσεων θραύσης της χειραλικής συμμετρίας

Όπως είδαμε, η αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας είναι η ύπαρξη μη-τετριμμένων λύσεων $\mathcal{M}(p^2) \neq 0$ (με $m_0 = 0$) της εξίσωσης χάσματος (3.18). Οι λύσεις αυτές παρουσιάζονται ως διακλαδώσεις της τετριμμένης λύσης $\mathcal{M}(p^2) = 0$. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η παραπάνω συνθήκη είναι και ικανή, δηλαδή αν όλες οι διακλαδωτικές λύσεις της εξίσωσης χάσματος αντιστοιχούν σε λύσεις δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας.
Από φυσικής άποψης, γνωρίζουμε ότι για κάθε γεννήτορα μιας παγκόσμιας συνεχούς συμμετρίας που θραύεται αυθόρμητα, εμφανίζεται στο φάσμα ένα μποζόνιο NG (θεώρημα Goldstone). Οι κβαντικοί αριθμοί του μποζονίου αυτού προσδιορίζονται απ΄ το αντίστοιχο διατηρούμενο ρεύμα Noether που θραύεται αυθόρμητα. Στην περίπτωσή μας, το ρεύμα που θραύεται αυθόρμητα είναι το ηλεκτρομαγνητικό αξονικό ρεύμα (axial currrent), οπότε αναμένουμε το αντίστοιχο μποζόνιο NG[14] να είναι ψευδοβαθμωτό. Συνεπώς αυτές οι μη-τετριμμένες λύσεις θα πρέπει να ικανοποιούν ταυτόχρονα την εξίσωση Bethe-Salpeter με $P^\mu = 0$ και $J^{PC} = 0^{-+}$. Επίσης, περιμένουμε ότι το αξονικό ρεύμα θα διατηρείται, πράγμα που πρέπει να ανταναχλάται και στην ικανοποίηση των ταυτοτήτων WGT.
Με βάση την παραπάνω ανάλυση έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία 3 ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι οι μη-τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης χάσματος θα σηματοδοτούν τη δυναμική θραύση της χειραλικής συμμετρίας. Αυτές είναι: η συνθήκη των Maskawa και Nakajima [41, 42], η συνθήκη των Cheng και Kuo [57] και η συνθήκη του Miransky [45]. Από φυσικής άποψης, οι συνθήκες αυτές είναι ισοδύναμες.

[14] Μια δέσμια κατάσταση $\bar{\psi}\psi$.

Η μαθηματική τους διατύπωση όμως διαφέρει, πράγμα που καθορίζει τη χρηστικότητά τους στη μελέτη διαφόρων φυσικών προβλημάτων.

Συνθήκη Maskawa-Nakajima

Οι Maskawa και Nakajima ορίζουν ως ικανή συνθήκη για την εμφάνιση αυθόρμητης θραύσης της χειραλικής συμμετρίας την *ικανοποίηση των ταυτοτήτων WGT στο σχήμα προσέγγισης που χρησιμοποιείται.*

Συνθήκη Cheng-Kuo

Οι Cheng και Kuo θεωρούν ότι οι λύσεις που θραύουν αυθόρμητα τη χειραλική συμμετρία θα πρέπει να σχετίζονται με τις άμαζες ψευδοβαθμωτές δέσμιες καταστάσεις $\bar{\psi}\psi$ που ικανοποιούν την εξίσωση Bethe-Salpeter. Καθώς η κυματοσυνάρτηση των δέσμιων καταστάσεων συνδέεται με τη συνάρτηση μάζας[15], η συνθήκη ύπαρξης των αντίστοιχων λύσεων της εξίσωσης BS παίρνει τελικά τη μορφή

$$\int_{\kappa^2}^{\Lambda^2} dq^2 \frac{q^2 \left|\mathcal{M}(q^2)\right|^2}{q^2 + \mathcal{M}^2(q^2)} < \infty. \tag{3.51}$$

Συνθήκη Miransky

Ο Miransky ορίζει ως ικανή συνθήκη τη *διατήρηση των αξονικών ρευμάτων* $j^a_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi$. Ο τελεστής $j^a_{5\mu}$ εξαρτάται απ΄ την τιμή της ορμής αποκοπής Λ

$$j_5^{(\sigma)a} = Z_m^{(\rho)}(\Lambda) j_5^a, \tag{3.52}$$

όπου ρ το σημείο όπου γίνεται ο υπολογισμός και η σταθερά επανακανονικοποίησης $Z_m^{(\rho)}$ συμπίπτει με τη σταθερά επανακανονικοποίησης της μάζας του φερμιονικού πεδίου [30]. Για να διατηρούνται τα αξονικά ρεύματα, θα πρέπει

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \partial^\mu j^a_{5\mu} = \lim_{\Lambda\to\infty} \left[m_0(\Lambda) j^a_5\right] = \lim_{\Lambda\to\infty} \left[m_0(\Lambda) Z_m^{(\rho)^{-1}}(\Lambda) j_5^{(\rho)a}\right] = 0, \tag{3.53}$$

οπότε η ικανή συνθήκη για την εμφάνιση αυθόρμητης θραύσης της χειραλικής συμμετρίας παίρνει τελικά τη μορφή

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \left[m_0(\Lambda) Z_m^{(\rho)^{-1}}(\Lambda)\right] = 0. \tag{3.54}$$

Με τη χρήση της τελευταίας συνθήκης, θα εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα της εμφάνισης λύσεων θραύσης της χειραλικής συμμετρίας σε υποκρίσιμες τιμές της σταθεράς ζεύξης. Παρατηρούμε οτί στο τοπικό όριο για $m_0 = 0$, η υπεριώδης συνοριακή συνθήκη που συνοδεύει τη διαφορική μορφή της εξίσωσης χάσματος (Εξ. 3.23 και Β΄.23) γίνεται

$$\lim_{p^2\to\infty} \left[p^2 \frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2} + \mathcal{M}(p^2)\right] = 0. \tag{3.55}$$

Όπως μπορούμε να δούμε απ΄ τις σχέσεις (3.27) και (Β΄.28 - Β΄.30), η συνοριακή συνθήκη (3.55) οδηγεί στην εμφάνιση μη-τετριμμένων λύσεων $\mathcal{M}(p^2) \neq 0$ για όλες τις τιμές $a > 0$[16]. Παρόλα αυτά, αντικαθιστώντας την Εξ. (3.27) στη συνοριακή συνθήκη (3.55)[17] αποδεικνύεται ότι μόνο η τετριμμένη λύση $\mathcal{M}(p^2) = 0$ ικανοποιεί τη συνθήκη (3.54). Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι μόνο στην υπερκρίσιμη φάση υπάρχουν μη-τετριμμένες λύσεις $\mathcal{M}(p^2) \neq 0$ που ικανοποιούν την (3.54) [30]. Συμπεραίνουμε τελικά ότι η θραύση της χειραλικής συμμετρίας εμφανίζεται μόνο σε υπερκρίσιμες τιμές της σταθεράς ζεύξης.

[15] Βλ. Ενότητα 3.1.2.

[16] Το πρόβλημα της εμφάνισης ψευδοβαθμωτών δέσμιων καταστάσεων (parapositronium) για οποιαδήποτε θετική τιμή της σταθεράς ζεύξης είναι γνωστό ως πρόβλημα Goldstein [58].

[17] Αντίστοιχα αντικαθιστώντας τη (Β΄.28) στην (3.55).

3.1.5 Ευσταθειοποίηση του κενού μέσω δυναμικής παραγωγής μάζας

Είδαμε στην Ενότητα 3.1.2, ότι στην υπερκρίσιμη φάση της QED με σβέση εμφανίζονται ταχυονικές καταστάσεις στο συμμετρικό κενό. Γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός πεδίου προσδιορίζεται απ΄ τη δεύτερη παράγωγο του ενεργού δυναμικού μέσω της σχέσης [11]

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}(\phi_0)}{d\phi^2} = m^2, \quad \text{με } V'_{\text{eff}}(\phi_0) = 0. \tag{3.56}$$

Η ύπαρξη ταχυονίων με $m^2 < 0$ υποδηλώνει μέσω της (3.56) ότι το πεδίο βρίσκεται σε ένα τοπικό μέγιστο του ενεργού δυναμικού και συνεπώς το κενό της θεωρίας είναι ασταθές. Αποδεικνύεται επιπλέον ότι η ύπαρξη ταχυονίων οδηγεί στην εμφάνιση ενός φανταστικού μέρους του ενεργού δυναμικού με

$$\text{Im}\left[V_{\text{eff}}(\phi_c)\right] < 0. \tag{3.57}$$

Καθώς το δυναμικό δίνει την πυκνότητα ενέργειας μιας κατάστασης, η ύπαρξη φανταστικού μέρους υποδηλώνει αστάθεια της κατάστασης. Στη μη-σχετικιστική κβαντομηχανική, ημιστάσιμες καταστάσεις με ενέργεια $E = E_0 - i\frac{\Gamma}{2}$ εμφανίζονται σε προβλήματα διάσπασης σωματιδίων [59]. Εκεί, το Γ ισούται με την πιθανότητα διάσπασης του σωματιδίου ανά χρονική στιγμή. Αντίστοιχα, η ποσότητα $-2\text{Im}\left[V_{\text{eff}}(\phi_c)\right]$ θα πρέπει να ισούται με την πιθανότητα διάσπασης της ασταθούς κατάστασης ανά χρονική στιγμή και μοναδιαίο όγκο του συστήματος, με $\langle\psi|\phi|\psi\rangle = \phi_c$ [30].
Καθώς ένα ασταθές κενό δεν μπορεί να πραγματοποιείται στη φύση, γεννάται το ερώτημα μέσω ποιου μηχανισμού πραγματοποιείται η ευσταθειοποίηση του ασταθούς κενού στην υπερκρίσιμη φάση της QED με σβέση. Ανατρέχοντας στη σχέση (3.44), παρατηρούμε ότι το τετράγωνο της μάζας των ψευδοβαθμωτών συμπυκνωμάτων $M_{ab}^{(p)2}$ αυξάνει με τη μάζα των συστατικών τους m_a, m_b. Στην τιμή

$$m^2 = m_{dyn}^2 = \frac{1}{2}\Lambda^2 f^{(1)}(a),$$

όπου η $f^{(1)}(a)$ υπολογίζεται απ΄ την (3.46) και $m = m_a = m_b$, τα ψευδοβαθμωτά ταχυόνια μετατρέπονται σε άμαζα ψευδοβαθμωτά μποζόνια NG. Επιπλέον, όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1.2, τα βαθμωτά ταχυόνια αναμένουμε να έχουν μεγαλύτερη μάζα απ΄ τα ψευδωβαθμωτά. Συνεπώς στην τιμή $m^2 = m_{dyn}^2$, τα βαθμωτά ταχυόνια θα έχουν αποκτήσει θετική μάζα. Το φαινόμενο αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1. Έτσι, στην υπερκρίσιμη περιοχή $a > a_c$, η δυναμική θραύση της χειραλικής συμμετρίας $U_L(N) \times U_R(N)$ οδηγεί στην εμφάνιση $2N^2$ χειραλικών συμπυκνωμάτων (N^2 ψευδοβαθμωτών και N^2 βαθμωτών). Στη χειραλικά συμμετρική φάση, τα συμπυκνώματα αυτά παρουσιάζονται ως ταχυόνια. Η θραύση της χειραλικής συμμετρίας που συμβαίνει στο μη συμμετρικό κενό, προκαλεί τη δυναμική παραγωγή μάζας, μέσω της οποίας τα N^2 ψευδοβαθμωτά ταχυόνια γίνονται άμαζα μποζόνια NG και τα υπόλοιπα N^2 βαθμωτά ταχυόνια αποκτούν πραγματική μάζα. Συνεπώς το κενό ευσταθειοποιείται μέσω του μηχανισμού της δυναμικής παραγωγής μάζας. Στην περίπτωση της QED με σβέση, η χειραλική ομάδα συμμετρίας είναι η $U_L(1) \times U_R(1)$, οπότε αναμένουμε την εμφάνιση ενός άμαζου ψευδοβαθμωτού μποζονίου NG (parapositronium) κι ενός μαζικού βαθμωτού μποζονίου (orthopositronium) στην περιοχή όπου $a > a_c$.

3.1.6 Διαστατική μετάλλαξη σύνθετων τελεστών σε ισχυρή ζεύξη

Το ρεύμα που συνδέεται με τους μετασχηματισμούς κλίμακας ονομάζεται ρεύμα διαστολής (dilatation current) $\mathbb{D}_\mu$. Ο κβαντικός αριθμός που συνδέεται με τον γεννήτορα διαστολής

$$\mathbb{D} = \int d^3x \mathbb{D}_0(x) \tag{3.58}$$

ονομάζεται δυναμική διάσταση d_ϕ [30]:

$$-i\left[\mathbb{D}, \phi(x)\right] = \left(d_\phi + x^\mu \partial_\mu\right)\phi(x). \tag{3.59}$$

ΣΧΗΜΑ 3.1: *Απεικόνιση της μάζας των ψευδοβαθμωτών* (p) *και βαθμωτών* (s) *συμπυκνωμάτων συναρτήσει της φερμιονικής μάζας* m.

Για άμαζα μη-αλληλεπιδρώντα πεδία, όπου η συμμετρία κλίμακας είναι ακριβής, η δυναμική διάσταση ταυτίζεται με την κανονική διάσταση $d_{c;\phi}$ του πεδίου. Ο υπολογισμός της κανονικής διάστασης των πεδίων γίνεται μέσω διαστατικής ανάλυσης των διαφόρων όρων της Λαγκρανζιανής. Αυτή δίνει ότι τα ελεύθερα μποζονικά πεδία έχουν κανονική διάσταση $\frac{1}{2}(d-2)$ ενώ τα φερμιονικά πεδία έχουν διάσταση $\frac{1}{2}(d-1)$, όπου d ο αριθμός των χωροχρονικών διαστάσεων. Για την περίπτωση της QED έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [\psi] = [\bar{\psi}] & = & \frac{3}{2}, \\ [A_\mu] & = & 1 \end{array} \right. \tag{3.60}$$

και συνεπώς οι τελεστές της (1.34) είναι περιθωριακοί (επανακανονικοποιήσιμοι), ενώ οι τελεστές 4 φερμιονίων $(\bar{\psi}\psi)^2$ είναι μη-σχετικοί (μη-επανακανονικοποιήσιμοι), αφού

$$[(\bar{\psi}\psi)^2] = 6 > 4. \tag{3.61}$$

Η ύπαρξη αλληλεπιδράσεων εισάγει μια ανώμαλη διάσταση

$$\gamma_\phi = |d_{c;\phi} - d_\phi| , \tag{3.62}$$

η οποία είναι συνήθως μη-μηδενική [30]. Συνεπώς η αύξηση της ανώμαλης διάστασης μπορεί να μετατρέψει μη-σχετικούς τελεστές σε περιθωριακούς ή σχετικούς. Θα εξετάσουμε το φαινόμενο της διαστατικής μετάλλαξης των τελεστών 4 φερμιονίων στην περιοχή ισχυρής ζεύξης της QED.
Η ανώμαλη διάσταση για τους τελεστές του τύπου $\bar{\psi}\lambda^a\psi$ και $\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi$, υπολογίζεται απ΄ τη σχέση [30]

$$\gamma_m = -\frac{\partial \ln Z_m^{(\rho)}}{\partial \ln \Lambda}, \tag{3.63}$$

ενώ η σταθερά επανακανονικοποίησης $Z_m^{(\rho)}$ υπολογίζεται απ΄ τη σχέση [30]

$$Z_m^{(\rho)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} & , & a < a_c \\ \frac{\rho}{\Lambda} & , & a \geq a_c. \end{array} \right. \tag{3.64}$$

Η (3.63) μέσω της (3.64) δίνει

$$\gamma_m = \begin{cases} 1-\sigma \quad , & a < a_c \\ \quad 1 \quad\;\; , & a \geq a_c, \end{cases} \tag{3.65}$$

όπου $\sigma = \sqrt{1 - \frac{a}{a_c}}$. Στη διαταρακτική QED με $a \ll a_c$ είναι $\sigma \simeq 1$, οπότε $\gamma_m \simeq 0$ κι από τη σχέση (3.62) συμπεραίνουμε ότι μόνο οι τελεστές με κανονική διάσταση ίση με 4 είναι επανακανονικοποιήσιμοι. Απ΄ τη σχέση (3.65) παρατηρούμε ότι στη φάση ισχυρής ζεύξης της QED, οι σύνθετοι τελεστές $\bar{\psi}\lambda^a\psi$ και $\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi$ αποκτούν μεγάλες ανώμαλες διαστάσεις. Μέσω της (3.62), υπολογίζουμε ότι ο χειραλικά αναλλοίωτος τελεστής 4 φερμιονίων

$$\frac{1}{\Lambda^2}\sum_a \left[\left(\bar{\psi}\lambda^a\psi\right)^2 + \left(i\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi\right)^2\right], \tag{3.66}$$

ο οποίος έχει κανονική διάσταση $d_c = 6$, αποκτά δυναμική διάσταση $d = 4$ κι επομένως γίνεται επανακανονικοποιήσιμος σε 4 χωροχρονικές διαστάσεις [60]. Το φυσικό περιεχόμενο της παραπάνω διαδικασίας είναι ότι σε ισχυρή ζεύξη, οι αλληλεπιδράσεις μικρών αποστάσεων ($r \sim \Lambda^{-1}$) ενισχύονται απ΄ τις ισχυρές ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις τύπου Coulomb κι εμφανίζονται σε μεγάλες κλίμακες χωρίς να υποβαθμίζονται. Το παραπάνω γεγονός υποδεικνύει ότι η QED σε ισχυρή ζεύξη είναι μη-πλήρης ως θεωρία και πρέπει να συμπληρωθεί με τους τελεστές 4 φερμιονίων του τύπου (3.66). Ένα μοντέλο που περιγράφει τη μίξη των τελεστών 4 φερμιονίων με την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση είναι το λεγόμενο τοπικό μοντέλο Nambu-Jona-Lasinio (gauged NJL model), το οποίο περιγράφεται απ΄ τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}^a\gamma^\mu\psi^a A_\mu + \frac{G}{2}\left[\left(\bar{\psi}^a\psi^a\right)^2 + \left(i\bar{\psi}^a\gamma_5\psi^a\right)^2\right], \tag{3.67}$$

όπου G η γυμνή σταθερά ζεύξης της αλληλεπίδρασης 4 φερμιονίων[18].

3.1.7 Το διάγραμμα φάσης και το τοπικό όριο της QED με σβέση

Είδαμε παραπάνω ότι η εισαγωγή μιας κλίμακας αποκοπής Λ είναι απαραίτητη για το σωστό ορισμό των εξισώσεων της θεωρίας[19]. Το Λ αναπαριστά την κλίμακα ενέργειας ή ισοδύναμα την κλίμακα αποστάσεων στην οποία γίνεται η παρατήρηση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά της θεωρίας στις 2 ακραίες περιπτώσεις $\Lambda \to 0$ (υπέρυθρο όριο) [20] και $\Lambda \to \infty$ (υπεριώδες όριο). Η συμπεριφορά της θεωρίας στα παραπάνω όρια καθορίζεται απ΄ τα σταθερά σημεία της συνάρτησης β της ομάδας επανακανονικοποίησης [11, 12, 16]. Έτσι, στις μη-αβελιανές θεωρίες, οι οποίες παρουσιάζουν ασυμπτωτική ελευθερία, η επανακανονικοποιημένη (κινούμενη) σταθερά ζεύξης (running coupling) μειώνεται με την ενέργεια, οπότε το σημείο $\beta = 0$ παρουσιάζεται ως ένα υπεριώδες σταθερό σημείο. Στις αβελιανές θεωρίες, οι οποίες είναι ασυμπτωτικά μη-ελεύθερες, η κινούμενη σταθερά ζεύξης αυξάνεται με την ενέργεια, οπότε το πρόβλημα της ύπαρξης του συνεχούς (τοπικού) ορίου $\Lambda \to \infty$ είναι καθαρά μη-διαταρακτικό[21].

Η κατάσταση μηδενικού φορτίου (πόλος Landau)

Οι Landau, Pomeranchuk και Fradkin υπολόγισαν ότι η κινούμενη σταθερά ζεύξης στη διαταρακτική QED υπολογίζεται απ΄ τη σχέση

$$\frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{e^2} = \frac{N_f}{6\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{m_R}, \tag{3.68}$$

[18] Για μια αντίστοιχη μελέτη του gauged NJL μοντέλου, βλ. [61].

[19] Βλ. Ενότητα 3.1.4

[20] Κατά σύμβαση το Λ χρησιμοποιείται ως υπεριώδης αποκοπή, οπότε σύμφωνα με τις παραπάνω συμβάσεις το υπέρυθρο όριο γράφεται πιο σωστά $\kappa \to 0$.

[21] Αντίστοιχα μεγαλύτερο ενδιαφέρον στις ασυμπτωτικά ελεύθερες θεωρίες παρουσιάζει ο προσδιορισμός του υπέρυθρου ορίου.

όπου e_R και e το επανακανονικοποιημένο και γυμνό φορτίο αντίστοιχα, και m_R η επανακανονικοποιημένη μάζα. Όπως φαίνεται απ΄ την Εξ. (3.68), αν κρατήσουμε το e σταθερό, έχουμε

$$e_R \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.69}$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **κατάσταση μηδενικού φορτίου** (zero-charge situtation) [62, 63] κι υποδεικνύει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις στο τοπικό όριο, δηλ. η θεωρία είναι τετριμμένη. Κρατώντας το e_R σταθερό, η Εξ. (3.68) δίνει

$$e \stackrel{\Lambda\to\Lambda_L}{\longrightarrow} \infty, \tag{3.70}$$

όπου

$$\Lambda_L = m_R \exp\left[\frac{6\pi^2}{N_f e_R^2}\right]. \tag{3.71}$$

Το φαινόμενο απειρισμού του γυμνού φορτίου στην κλίμακα Λ_L έχει ονομαστεί **πόλος Landau**. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται σε όλες τις θεωρίες πεδίου που δεν είναι ασυμπτωτικά ελεύθερες και συνεπώς φαίνεται να υποδεικνύει ότι όλες οι αβελιανές θεωρίες πεδίου είναι τετριμμένες. Σημειώνουμε ότι για $N_f = 1$ η (3.71) δίνει $\Lambda_L \simeq 10^{227}$GeV ενώ για το καθιερωμένο πρότυπο ισχύει $\Lambda_L \simeq 10^{34}$GeV. Στο ελάχιστο υπερσυμμετρικό καθιερωμένο πρότυπο (minimal supersymmetric standard model), ο πόλος Landau μετατοπίζεται σε ενέργειες $\Lambda_L \simeq 10^{20}$GeV ενώ αν συμπεριλάβουμε 4 μποζόνια Higgs στο MSSM η τιμή αυτή γίνεται $\Lambda_L \simeq 10^{17}$GeV [64]. Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη υπερσυμμετρίας μετατοπίζει τον πόλο Landau σε ενέργειες μικρότερες απ΄ την κλίμακα Planck $\Lambda_{Pl} \simeq 10^{19}$GeV, όπου αναμένουμε μια ριζική διαφοροποίηση των φυσικών θεωριών, οπότε η κατάσταση μηδενικού φορτίου μπορεί να αποτελεί ένα υπαρκτό πρόβλημα για τις αβελιανές κβαντικές θεωρίες πεδίου. Οι Gell-Mann και Low απέδειξαν ότι η ύπαρξη του συνεχούς ορίου είναι δυνατή μόνο αν η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης διαθέτει ένα υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο [65]. Παρακάτω θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου σταθερού σημείου στην υπερκρίσιμη φάση της QED με σβέση.

Το υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο της QED με σβέση

Αν προσπαθήσουμε να πάρουμε το όριο $\Lambda \to \infty$ για τις φυσικές ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω ανάλυση, καταλήγουμε σε φυσικά μη αποδεκτά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, η σχέση (3.34) δίνει

$$m_{dyn} = \Lambda \exp\left[-\frac{A}{\tau} + B\right] \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{3.72}$$

Επίσης, θεωρώντας την m_{dyn} ως ελεύθερη παράμετρο, παρατηρούμε απ΄ τη σχέση (3.40) ότι η κυματοσυνάρτηση των συμπυκνωμάτων διαθέτει άπειρες σε πλήθος μηδενικές λύσεις στο όριο $\Lambda \to \infty$. Καθώς η κυματοσυνάρτηση (3.40) περιγράφει μια άμαζη δέσμια κατάσταση, η ύπαρξη άπειρων σε πλήθος μηδενικών λύσεων υποδεικνύει ότι σε κάθε τιμή της m_{dyn} θα υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από ταχυόνια, όπως επιβεβαιώνεται κι απ΄ τη σχέση (3.44). Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό απ΄ την κβαντομηχανική ως κατάρρευση ή πτώση στο κέντρο (fall to the center) [59]. Στην περίπτωση ενός σχετικιστικού σωματιδίου που βρίσκεται σε ένα υπερκρίσιμο εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το φαινόμενο εμφανίζεται μέσω της αναδιοργάνωσης του κενού μέσω της δημιουργίας ζευγών e^-e^+. Το ποζιτρόνιο διαφεύγει στο άπειρο, ενώ το ηλεκτρόνιο δεσμεύεται απ΄ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, θωρακίζοντας το φορτίο του κι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρις ότου $Z < Z_{cr}$. Στην περίπτωση της θεωρίας πεδίου, το αντίστοιχο φαινόμενο της κατάρρευσης εκφράζεται μέσω της ύπαρξης ταχυονικών καταστάσεων, όπου το κενό ευσταθειοποιείται όπως είδαμε μέσω της δυναμικής παραγωγής μάζας. Επομένως υπάρχουν 2 δυνατότητες ευσταθειοποίησης του κενού: α) μέσω θωράκισης (shielding) του φορτίου (εξωτερικά πεδία), β) μέσω δυναμικής παραγωγής μάζας (θεωρία πεδίου) [66].

Η αποφυγή των παραπάνω μη-αποδεκτών αποτελεσμάτων μπορεί να γίνει μέσω της ερμηνείας του a_c ως ένα υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο, η οποία οφείλεται στον Miransky [45]. Λύνοντας την (3.72) ως προς a, παίρνουμε[22]

$$a = a_c + \frac{A^2 a_c}{\ln^2\left[\frac{\Lambda}{m_{dyn}}\mathrm{e}^B\right]} \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} a_c. \tag{3.73}$$

Απ' τη σκοπιά της θεωρίας των μεταβάσεων φάσης [16], η κρίσιμη σταθερά ζεύξης αντιστοιχεί σε μια αλλαγή φάσης, η οποία διαχωρίζει τη χειραλικά συμμετρική φάση ($a < a_c$) απ' τη φάση όπου η χειραλική συμμετρία θραύεται αυθόρμητα ($a > a_c$). Η αλλαγή φάσης είναι 2ης τάξης, καθώς η παράμετρος τάξης (3.72) τείνει συνεχώς στο 0 καθώς $a \to a_c^+$. Απ' τη σκοπιά της ομάδας επανακανονικοποίησης, η κρίσιμη τιμή a_c αποτελεί ένα υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο. Η συνάρτηση β που περιγράφει τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης στην υπερκρίσιμη φάση της QED με σβέση είναι[23] [61]

$$\beta(a) = -\frac{2}{3}\left(\frac{a}{a_c} - 1\right)^{3/2}. \tag{3.74}$$

Το υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο προσδιορίζεται απ' τη μηδενική λύση της (3.74) κι ορίζει μια κλάση οικουμενικότητας, η οποία είναι διαφορετική απ' αυτή της διαταρακτικής (υποκρίσιμης) QED με σβέση. Όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1.6, στη συγκεκριμένη κλάση οικουμενικότητας θα εμφανίζονται σύνθετα χειραλικά πεδία $\pi^a \sim \bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi$ και $\sigma^a \sim \bar{\psi}\lambda^a\psi$ ως νέοι βαθμοί ελευθερίας. Η επανακανονικοποίηση της σταθεράς ζεύξης συνίσταται στη λεπτή ρύθμιση (fine tuning) της a σύμφωνα με τη σχέση (3.73). Η επανακανονικοποίηση αυτή κρατάει τη δυναμική μάζα πεπερασμένη στο όριο $\Lambda \to \infty$ και μεταβάλλει τη μορφή της κυματοσυνάρτησης (3.40) έτσι ώστε οι ταχυονικές καταστάσεις να μην εμφανίζονται στο φάσμα.

Το διάγραμμα φάσης της QED με σβέση

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παρουσιάζουμε το διάγραμμα φάσης της QED με σβέση.

Υποκρίσιμη φάση $a < a_c$

Στην υποκρίσιμη φάση της QED με σβέση, είναι

$$\beta(a) = 0 \tag{3.75}$$

για κάθε $a < a_c$. Συνεπώς, κάθε τιμή της γυμνής σταθεράς ζεύξης a ορίζει ένα τετριμμένο υπέρυθρο ευσταθές σταθερό σημείο κι η θεωρία είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας.

Υπερκρίσιμη φάση $a > a_c$

Στην υπερκρίσιμη φάση της QED με σβέση, η δυναμική θραύση της χειραλικής συμμετρίας οδηγεί στην εμφάνιση μιας νέας υπεριώδους απόκλισης που συνδέεται με την επανακανονικοποίηση της μάζας. Η επανακανονικοποίηση της μάζας προκαλεί την κίνηση της σταθεράς ζεύξης σύμφωνα με τη σχέση (3.73). Η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης περιγράφεται απ' τη β συνάρτηση (3.74) και στο συνεχές όριο $\Lambda \to \infty$ καταλήγει στο υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο $a = a_c$. Η κατάσταση μηδενικού φορτίου δεν εμφανίζεται στη φάση όπου $a > a_c$, οπότε η υπερκρίσιμη QED με σβέση είναι μη-τετριμμένη.

[22] Υπενθυμίζουμε ότι το a αναφέρεται στη γυμνή σταθερά ζεύξης.

[23] Η σχέση (3.74) έχει εξαχθεί απ' την (3.73) μέσω του ορισμού $\beta(a) = \frac{\partial a}{\partial \ln \Lambda}$, με $A = \pi$, $B = 2\ln 2$ (Β'.37).

Το διάγραμμα φάσης του τοπικού NJL μοντέλου

Ξεκινώντας απ᾽ τη Λαγκρανζιανή (3.67), αποδεικνύεται [30] ότι η εξίσωση χάσματος του τοπικού NJL μοντέλου στην προσέγγιση ίριδας παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p^2) &= \frac{3a}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^2}+\frac{\theta(k^2-p^2)}{k^2}\right] \\ &+ \frac{\kappa}{\Lambda^2}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)},\end{aligned} \tag{3.76}$$

όπου $\kappa = \frac{N_f G\Lambda^2}{4\pi^2}$, η οποία μετασχηματίζεται στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dp^2}\left[p^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}\right] + \frac{3a}{4\pi}\frac{\mathcal{M}(p^2)}{p^2+\mathcal{M}(p^2)} = 0, \tag{3.77}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{p^2\to 0}\left[\left(p^2\right)^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}\right] = 0, \tag{3.78}$$

$$\lim_{p^2\to\Lambda^2}\left[\left(1+\frac{4\pi\kappa}{3a}\right)p^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}+\mathcal{M}(p^2)\right] = 0. \tag{3.79}$$

Γραμμικοποιώντας την (3.77) βάσει της γραμμικοποίησης ισχυρής αποκοπής που είδαμε παραπάνω κι επιβάλοντας τις συνοριακές συνθήκες (3.78), (3.79), βρίσκουμε [67] ότι στο τοπικό όριο $\Lambda \to \infty$ οι μη-τετριμμένες χειραλικά ασυμμετρικές λύσεις ικανοποιούν την

$$\kappa_c(a) = \frac{1}{4}(1-\sigma)^2, \quad \text{για } a \le a_c, \tag{3.80}$$

όπου $\sigma = \sqrt{1-\frac{a}{a_c}}$. Η (3.80) ορίζει μια κρίσιμη γραμμή στο επίπεδο (a, κ_c), η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2.

Παραθέτουμε χάριν πληρότητας τους κρίσιμους εκθέτες του τοπικού NJL μοντέλου με σβέση [68]

$$a = \frac{2(\sigma-1)}{\sigma}, \quad \beta = \frac{2-\sigma}{2\sigma}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = \frac{2+\sigma}{2-\sigma}, \quad \nu = \frac{1}{2\sigma}, \quad \eta = 2(1-\sigma). \tag{3.81}$$

Παρατηρούμε ότι οι κρίσιμοι εκθέτες εξαρτώνται απ᾽ τη σταθερά ζεύξης a κάτι που αντιβαίνει στην οικουμενικότητα. Η λιγότερο αυστηρή ασθενής οικουμενικότητα (weak universality), απαιτεί οι ανηγμένοι (reduced) κρίσιμοι εκθέτες [69]

$$\hat{\phi} \equiv \frac{2-a}{\nu}, \quad \hat{\beta} \equiv \frac{\beta}{\nu}, \quad \hat{\gamma} \equiv \frac{\gamma}{\nu}, \quad \hat{\delta} \equiv \delta, \quad \hat{\eta} \equiv \eta, \tag{3.82}$$

να εξαρτώνται μόνο από θεμελιώδεις παραμέτρους όπως η διάσταση του χωροχρόνου D, οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος και η παράμετρος εμβέλειας του δυναμικού. Υπολογίζοντας τους ανηγμένους κρίσιμους εκθέτες για το τοπικό NJL μοντέλο με σβέση, βρίσκουμε

$$\hat{\phi} = 4, \quad \hat{\beta} = 2-\sigma, \quad \hat{\gamma} = 2\sigma, \quad \hat{\delta} = \frac{2+\sigma}{2-\sigma}, \quad \hat{\eta} = 2(1-\sigma). \tag{3.83}$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι η QED με σβέση περιγράφεται απ᾽ τους ίδιους κρίσιμους εκθέτες με το τοπικό NJL μοντέλο με σβέση [68]. Καταλήγουμε συνεπώς στο συμπέρασμα, ότι το τοπικό NJL μοντέλο και η

ΣΧΗΜΑ 3.2: *Η κρίσιμη γραμμή του τοπικού NJL μοντέλου στην προσέγγιση ίριδας. Οι περιοχές I και II αντιστοιχούν στη χειραλικά συμμετρική κι ασυμμετρική φάση αντίστοιχα.*

QED παραβιάζουν την ασθενή οικουμενικότητα στην προσέγγιση σβέσης.
Για $\frac{1}{4} \leq \kappa \leq 1$, αποδεικνύεται [70] ότι η δυναμική μάζα δίνεται απ' το νόμο βάθμισης μέσου πεδίου

$$\frac{m}{\Lambda} \sim \sqrt{a - a_c},$$

ενώ για $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{4}$, η δυναμική μάζα δίνεται απ' το νόμο βάθμισης Miransky. Επίσης, απ' το Σχήμα 3.2, παρατηρούμε ότι το σημείο $(1, 0)$ ορίζει το κρίσιμο σημείο του καθαρού NJL μοντέλου (pure NJL), για το οποίο, οι κρίσιμοι εκθέτες[24] ταυτίζονται με τους κρίσιμους εκθέτες μιας κλασσικής θεωρίας μέσου πεδίου

$$a_{cl} = 0, \quad \beta_{cl} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_{cl} = 1, \quad \delta_{cl} = 3, \quad \nu_{cl} = \frac{1}{2}, \quad \eta_{cl} = 0. \tag{3.84}$$

Αντίστοιχα το σημείο $(0, 1)$ ορίζει το όριο της καθαρής QED με σβέση. Το σημείο αυτό, όπως είδαμε παραπάνω, αποτελεί ένα υπεριώδες ευσταθές σταθερό σημείο, στο οποίο τα στοιχειώδη πεδία της θεωρίας αλληλεπιδρούν με τα χειραλικά συμπυκνώματα που παράγονται απ' τη δυναμική θραύση της χειραλικής συμμετρίας μέσω δυνάμεων τύπου Yukawa [45]. Συνεπώς η κρίσιμη γραμμή (3.80) συνδέει τα κρίσιμα σημεία της QED και του μοντέλου NJL στην προσέγγιση σβέσης.

3.2 Δυναμική παραγωγή μάζας στην QED χωρίς σβέση

Στην Ενότητα αυτή, θα μελετήσουμε την εξίσωση χάσματος πέρα απ' την προσέγγιση σβέσης. Για την περικοπή του συστήματος εξισώσεων SD θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση γυμνής κορυφής (3.1). Στην QED χωρίς σβέση ($N_f \neq 0$), το φαινόμενο της πόλωσης του κενού μέσω της δημιουργίας ζευγών φερμιονίων-αντιφερμιονίων, εισάγει διορθώσεις ακτινοβολίας στον ελεύθερο φωτονικό διαδότη. Οι διορθώσεις αυτές εμπερικλείονται στον τανυστή πόλωσης κενού (Εξ. 2.76). Απ' τις Εξ. (2.76), (2.78), (2.94), συνεπάγεται ότι στην QED χωρίς σβέση, ο ακριβής φωτονικός διαδότης γράφεται στη μορφή[25]

$$D_{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]\mathcal{G}(q^2) - \xi\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \tag{3.85}$$

[24] Οι κρίσιμοι εκθέτες του καθαρού NJL μοντέλου υπολογίζονται απ' τις σχέσεις (3.81) με $\sigma \to 1$

[25] Σημειώνουμε ότι η Εξ. (3.85) είναι ακριβής, δηλ. δεν προκύπτει από κάποιο σχήμα προσέγγισης.

Αντικαθιστώντας τις (2.92), (2.99), (3.1), (3.85) στη (2.103), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} &= 1 - \frac{1}{4p^2}\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2-\mathcal{M}^2(k^2)} \mathrm{Tr}\left[\not{p}\gamma^\mu\left(\not{k}+\mathcal{M}(k^2)\right)\gamma^\nu\right] D_{\mu\nu}(q) \\
&= 1 - \frac{ie^2}{p^2(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2-\mathcal{M}^2(k^2)} \left(p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu - k.p\, g^{\mu\nu}\right) \\
&\times \left\{-\frac{1}{q^2}\mathcal{G}(q^2)\left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right] - \xi\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right\} \\
&= 1 - \frac{e^2}{p^2(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{q^2\left(k^2+\mathcal{M}^2(k^2)\right)} \left\{\mathcal{G}(q^2)\left[2\frac{k^2p^2-(k.p)^2}{q^2} - 3k.p\right]\right. \\
&+ \left. \xi\frac{\left(k^2+p^2\right)k.p - 2k^2p^2}{q^2}\right\}, \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

όπου $q = k - p$ και στην τελευταία ισότητα έχουμε εκτελέσει μια περιστροφή Wick. Εισάγοντας τώρα τις σφαιρικές συντεταγμένες (3.11), η (3.86) γίνεται

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} &= 1 - \frac{a}{2\pi^2p^2}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{F}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2\theta}{q^2}\left\{\mathcal{G}(q^2)\left[\frac{2p^2k^2\sin^2\theta}{q^2} - 3kp\cos\theta\right]\right. \\
&+ \left. \xi\,\frac{(k^2+p^2)kp\cos\theta - 2k^2p^2}{q^2}\right\}. \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

Για να εκτελέσουμε αναλυτικά τις γωνιακές ολοκληρώσεις στην (3.87), θα πρέπει να καταφύγουμε στην προσέγγιση Landau-Abrikosov-Khalatnikov [71]:

$$\mathcal{G}\left((p-k)^2\right) \simeq \mathcal{G}\left(\max\{p^2,k^2\}\right) \equiv \mathcal{G}(k^2)\theta\left(k^2-p^2\right) + \mathcal{G}(p^2)\theta\left(p^2-k^2\right). \qquad (3.88)$$

Στην προσέγγιση (3.88), βάσει των σχέσεων (Β΄.10), (Β΄.12), υπολογίζουμε

$$\int_0^\pi d\theta\; \mathcal{G}(q^2)\left[\frac{2p^2k^2\sin^4\theta}{q^4} - \frac{3kp\cos\theta\sin^2\theta}{q^2}\right] = 0, \qquad (3.89)$$

οπότε η (3.87) γίνεται

$$\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} = 1 + \frac{a\xi}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{k^4}{p^4}\theta\left(p^2-k^2\right) + \theta\left(k^2-p^2\right)\right], \qquad (3.90)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις (Β΄.17) και (Β΄.18). Ομοίως, αντικαθιστώντας τις (2.92), (2.99), (3.1), (3.85) στη (2.102), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} &= m_0 + \frac{ie^2}{4(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2-\mathcal{M}^2(k^2)} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\left(\not{k}+\mathcal{M}(k^2)\right)\gamma^\nu\right] D_{\mu\nu}(q) \\
&= m_0 - \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2-\mathcal{M}^2(k^2)} g^{\mu\nu}\frac{1}{q^2}\left[\mathcal{G}(q^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \xi\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right] \\
&= m_0 + \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathcal{F}(k^2)}{q^2\left(k^2+\mathcal{M}^2(k^2)\right)}\left[3\mathcal{G}(q^2)+\xi\right], \qquad (3.91)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε εκτελέση μια περιστροφή Wick. Εισάγοντας τις σφαιρικές συντεταγμένες (3.11) στην (3.91), παίρνουμε

$$\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} = m_0 + \frac{a}{2\pi^2}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(p^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2\theta}{q^2}\left[3\mathcal{G}(q^2)+\xi\right]. \qquad (3.92)$$

Εισάγοντας την προσέγγιση LAK (3.88) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (Β΄.3), πραγματοποιούμε τη γωνιακή ολοκλήρωση στην (3.92) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} &= m_0 + \frac{3a}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\mathcal{G}(p^2)\frac{\theta\left(p^2-k^2\right)}{p^2}+\mathcal{G}(k^2)\frac{\theta\left(k^2-p^2\right)}{k^2}\right] \\ &+ \frac{a\xi}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{F}(k^2)\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{\theta\left(p^2-k^2\right)}{p^2}+\frac{\theta\left(k^2-p^2\right)}{k^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.93}$$

3.2.1 Η κρίσιμη σταθερά ζεύξης

Η μελέτη της δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας θα γίνει στη βαθμίδα Landau. Θέτοντας $\xi = 0$ στην Εξ. (3.93), παίρνουμε

$$\mathcal{F}(p^2) = 1, \tag{3.94}$$

οπότε στη συγκεκριμένη βαθμίδα η εξίσωση χάσματος στην περίπτωση της QED χωρίς σβέση παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{M}(p^2) = m_0 + \frac{3a}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2\mathcal{M}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\mathcal{G}(p^2)\frac{\theta\left(p^2-k^2\right)}{p^2}+\mathcal{G}(k^2)\frac{\theta\left(k^2-p^2\right)}{k^2}\right]. \tag{3.95}$$

Όπως και στην περίπτωση της QED με σβέση, οι μη-τετριμμένες λύσεις της (3.95) μπορούν να εντοπιστούν μέσω της γραμμικοποιημένης μορφής της[26]

$$\mathcal{M}(p^2) = \frac{3a}{4\pi}\int_{\kappa^2}^{\Lambda^2} dk^2 \mathcal{M}(k^2)\left[\mathcal{G}(p^2)\frac{\theta\left(p^2-k^2\right)}{p^2}+\mathcal{G}(k^2)\frac{\theta\left(k^2-p^2\right)}{k^2}\right]. \tag{3.96}$$

Για να προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε την έκφραση της συνάρτησης επανακανονικοποίησης του φωτονικού πεδίου $\mathcal{G}$, η οποία εμπερικλείει την επίδραση της πόλωσης του κενού. Σε μια αυστηρή προσέγγιση, η συνάρτηση αυτή πρέπει να υπολογιστεί ταυτόχρονα με τις συναρτήσεις $\mathcal{M}$ και $\mathcal{F}$ απ΄ το κλειστό σύστημα $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ (Εξ. 2.98). Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει όμως μόνο αριθμητικά. Για την έρευση της αναλυτικής λύσης της (3.96), πρέπει να καταφύγουμε σε κάποιο σχήμα προσέγγισης για τον υπολογισμό του $\mathcal{G}$. Η πιο απλή προσέγγιση βασίζεται στην αντικατάσταση

$$\mathcal{G}(p^2) = \frac{1}{1+\Pi(p^2)}, \tag{3.97}$$

όπου το $\Pi(p^2)$ υπολογίζεται απ΄ τη διαταρακτική προσέγγιση 1 βρόγχου (one-loop approximation) [11]

$$\Pi(p^2) = \frac{aN_f}{3\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{p^2}+C+\rho\right), \tag{3.98}$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται απ΄ το σχήμα εξομάλυνσης και

$$\rho = \ln\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda^2},$$

με Λ_p, Λ τις ορμές αποκοπής του φωτονικού και του φερμιονικού πεδίου αντίστοιχα [72]. Σημειώνουμε ότι μελέτες της QED στο πλέγμα (lattice QED) έχουν αποκαλύψει ότι η προσέγγιση 1 βρόγχου αναπαράγει σωστά τη συμπεριφορά του φωτονικού διαδότη σε μια μεγάλη περιοχή ενεργειών [73]. Με τις αντικαταστάσεις (3.97), (3.98), η (3.96) μπορεί να μετασχηματισθεί στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2\mathcal{M}(z)}{dz^2}+\left(\frac{2}{z}-\frac{z}{z-1}\right)\frac{d\mathcal{M}(z)}{dz}+\frac{9}{4N_f}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)\mathcal{M}(z)=0, \tag{3.99}$$

[26] Έχουμε θέσει $m_0 = 0$ καθώς ψάχνουμε λύσεις αυθόρμητης θραύσης της χειραλικής συμμετρίας. Η γραμμικοποίηση έχει γίνει βάσει του σχήματος ισχυρής αποκοπής (βλ. Εξ. 3.19).

με τις συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{z\to z_0}\left[\mathcal{M}(z)+\frac{z}{1-z}\frac{d\mathcal{M}(z)}{dz}\right] = m_0, \tag{3.100}$$

$$\lim_{z\to z_\mu}\frac{d\mathcal{M}(z)}{dz} = 0, \tag{3.101}$$

όπου

$$\begin{aligned} z &\equiv z_0+\ln\tfrac{\Lambda^2}{p^2} \\ z_0 &\equiv \tfrac{3\pi}{aN_f}+C+\rho \\ z_\mu &\equiv z_0+\ln\tfrac{\Lambda^2}{\kappa^2}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Η (3.99) έχει 3 ιδιάζοντα σημεία $z = 0, 1, \infty$, εκ των οποίων τα $z = 0, 1$ είναι ομαλά, ενώ το $z = \infty$ είναι ανώμαλο. Συνεπώς η λύση της δεν μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή μέσω γνωστών συναρτήσεων. Για τη λύση της πρέπει να καταφύγουμε είτε σε περαιτέρω προσεγγίσεις [74], είτε στη μέθοδο ασυμπτωτικού αναπτύγματος [72]. Στην πρώτη περίπτωση, βρίσκουμε $a_c \simeq 1,95$, ενώ η δεύτερη μέθοδος δίνει $a_c \simeq 2$. Σημειώνουμε ότι και στις 2 περιπτώσεις τα αποτελέσματα ισχύουν μόνο στην περίπτωση $N_f = 1$. Όπως έχει επιβεβαιωθεί από την αριθμητική επίλυση των παραπάνω εξισώσεων [70, 75, 76], η κρίσιμη σταθερά ζεύξης στην περίπτωση της QED χωρίς σβέση είναι αυξημένη σε σχέση με την περίπτωση της QED με σβέση

$$a_c^{unq}(N_f = 1) \simeq 2a_c^q. \tag{3.103}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση της QED χωρίς σβέση, η κρίσιμη σταθερά ζεύξης εξαρτάται απ΄ τον αριθμό των φερμιονικών γεύσεων

$$a_c = a_c(N_f) \tag{3.104}$$

και μάλιστα φαίνεται ότι κρίσιμη σταθερά ζεύξης μετατοπίζεται σε μικρότερες τιμές καθώς αυξάνει το N_f [72], αφού η προάσπιση (screening) λόγω των επιπλέον φερμιονικών βρόγχων μειώνει την ισχύ των αλληλεπιδράσεων. Μελέτες της QED_4 στο πλέγμα έχουν επιβεβαιώσει ότι η μείωση αυτή είναι μονότονη [77–79]. Ένα επιπλέον σημαντικό στοιχείο είναι η ύπαρξη ενός κρίσιμου αριθμού φερμιονικών γεύσεων N_f^{cr}, πάνω απ΄ τον οποίο δεν παρατηρείται θραύση της χειραλικής συμμετρίας για οποιαδήποτε τιμή της σταθεράς ζεύξης. Σύμφωνα με τις αναλυτικές προσεγγίσεις, αυτό συμβαίνει για $C + \rho > 0$, ενώ για $C + \rho < 0$ δε φαίνεται να υπάρχει κάποιο N_f^{cr}. Στην πρώτη περίπτωση το N_f^{cr} προσδιορίζεται απ΄ το σημείο τομής της ευθείας $N_f = \frac{3\pi}{a(C+\rho)}$ με την κρίσιμη γραμμή που αντιστοιχεί στην περίπτωση $C = \rho = 0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3 [72]. Η ύπαρξη της τιμής N_f^{cr} πάνω απ΄ την οποία δεν παρατηρείται θραύση της χειραλικής συμμετρίας, φαίνεται να είναι σε συμφωνία με τη συμπεριφορά που προβλέπεται απ΄ τη θεωρία διαταραχών στην προσέγγιση 1 βρόγχου (Εξ. 3.68), η οποία θεωρείται ακριβής για μεγάλο N_f [80]. Μελέτες της QED στο πλέγμα συγκλίνουν στο ότι $N_f^{cr} \simeq 30$ [78, 80]. Σύμφωνα με αυτές, για μικρό N_f, η χειραλική μετάβαση φάσης είναι 2ης τάξης, ενώ για $N_f \simeq 30$, η χειραλική μετάβαση είναι 1ης τάξης. Συνεπώς, μεταξύ των 2, αναμένεται να υπάρχει ένα τρικρίσιμο σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4.

Απ΄ τα παραπάνω, φαίνεται ότι ο αριθμός των φερμιονικών γεύσεων N_f συμπεριφέρεται ως μια επιπλέον ελεύθερη παράμετρος στη θεωρία. Συνεπώς, δεν αποκλείεται η ύπαρξη μιας ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης, η οποία να συνδέει τις διάφορες τιμές του N_f, καταλήγοντας σε ένα σταθερό σημείο. Η περίπτωση αυτή υποδεικνύει ότι ο χώρος των σχετικών παραμέτρων της QED μπορεί ενδεχομένως να συμπεριλαμβάνει και το N_f [78].

3.2.2 Ο νόμος βάθμισης κι η κλάση οικουμενικότητας

Στην περίπτωση της QED χωρίς σβέση, οι αναλυτικές μελέτες του συστήματος των εξισώσεων SD έχουν καταλήξει στο ότι ο νόμος βάθμισης είναι τύπου **μέσου πεδίου** [72, 74, 81]

$$m \simeq \Lambda\left(a^{(0)}(\Lambda) - a_c\right)^{1/2}, \tag{3.105}$$

ΣΧΗΜΑ 3.3: *Το διάγραμμα φάσης της QED_4 χωρίς σβέση στο χώρο ($\beta = \frac{\pi}{a}, N_f$), έτσι όπως προκύπτει απ΄ τη λύση της Εξ. (3.99) μέσω του ασυμπτωτικού αναπτύγματος. Η λύση ισχύει για $N_f = 1$. Το N_f^{cr} προσδιορίζεται απ΄ το σημείο τομής της κρίσιμης γραμμής με την ευθεία $N_f = \frac{3\pi}{a}$.* [72]

συνεπώς η επανακανονικοποίηση της σταθεράς ζεύξης περιγράφεται απ΄ τη σχέση

$$a^{(0)}(\Lambda) = a_c + \frac{m^2}{\Lambda^2} \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} a_c. \tag{3.106}$$

Στην περίπτωση αυτή η β-συνάρτηση που ορίζεται είναι

$$\beta(a) = -2\left(a^{(0)} - a_c\right). \tag{3.107}$$

Η παραπάνω συνάρτηση φαίνεται να παρουσιάζει ένα μη-τετριμμένο σημείο μηδενισμού στο $a = a_c$. Σημειώνουμε όμως ότι η παραπάνω ανάλυση βασίζεται σε προσεγγίσεις που ισχύουν για $N_f = 1$. Συνεπώς, η ύπαρξη ενός μη-τετριμμένου υπεριώδους ευσταθούς σημείου στην QED χωρίς σβέση δεν μπορεί γενικά να εξασφαλιστεί απ΄ τις δεδομένες αναλυτικές μεθόδους. Τα παραπάνω αποτελέσματα στηρίζονται και απ΄ την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων SD [70, 75, 76].

Απ΄ την άλλη, οι μελέτες τις QED_4 στο πλέγμα καταλήγουν στα εξής αποτελέσματα. Η βάθμιση της δυναμικής μάζας δίνεται απ΄ τη σχέση

$$\frac{m}{\Lambda} \propto \left(a^{(0)}(\Lambda) - a_c\right)^{\nu}, \tag{3.108}$$

στην περίπτωση όπου $N_f \neq 0$. Για μικρές τιμές του N_f φαίνεται να υπάρχει απόκλιση απ΄ τη βάθμιση μέσου πεδίου. Παραδείγματος χάριν, για $N_f = 4$, οι μελέτες στο πλέγμα δίνουν $\nu \simeq 0.7$, ενώ όσο αυξάνεται το N_f ο κρίσιμος εκθέτης ν φαίνεται να τείνει στην τιμή του μέσου πεδίου $\nu = \frac{1}{2}$ [77][27].

Η πιο αξιόπιστη μέθοδος για τον προσδιορισμό του νόμου βάθμισης βασίζεται στον υπολογισμό των κρίσιμων εκθετών στην περιοχή του κρίσιμου σημείου. Οι μελέτες στο πλέγμα, φαίνονται να συγκλίνουν στο ότι οι κρίσιμοι εκθέτες ταυτίζονται με τους κλασσικούς κρίσιμους εκθέτες της θεωρίας μέσου πεδίου, αν και ο υπολογισμός των κρίσιμων εκθετών παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία στην περιοχή του κρίσιμου

[27]Σημειώνουμε ότι μελέτες στο πλέγμα δίνουν καλή προσαρμογή της δυναμικά παραγόμενης μάζας στη βάθμιση μέσου πεδίου ήδη απ΄ την τιμή $N_f = 8$ [78].

ΣΧΗΜΑ 3.4: *Το διάγραμμα φάσης της QED_4 στο χώρο (β, N_f), έτσι όπως προκύπτει από μελέτες στο πλέγμα. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί σε μεταβάσεις φάσεις 2ης τάξης, ενώ η διακεκομμένη σε 1ης τάξης. Το T αποτελεί ένα τρικρίσιμο σημείο, του οποίου η ακριβής θέση είναι άγνωστη.* [78]

σημείου [73, 82, 83]. Οι μελέτες αυτές προβλέπουν επιπλέον ότι ο σύνθετος τελεστής $\bar{\psi}\psi$ αποκτά μεγάλη ανώμαλη διάσταση

$$\gamma_m = 2, \tag{3.109}$$

κάτι το οποίο υποδεικνύει ότι η μελέτη της χειραλικής μετάβασης φάσης θα πρέπει να συμπεριλάβει εξ' αρχής τους τελεστές 4-φερμιονίων [82]. Η μελέτη της δυναμικής θραύσης της χειραλικής συμμετρίας στο τοπικό NJL μοντέλο έχει γίνει τόσο αναλυτικά [68] όσο και στο πλέγμα [84–86]. Και οι δύο μέθοδοι καταλήγουν στο ότι το τοπικό NJL μοντέλο και η QED στην προσέγγιση χωρίς σβέση ανήκουν στην ίδια κλάση οικουμενικότητας (και ασθενή κλάση οικουμενικότητας) με το μοντέλο μηδενικού φορτίου (θεωρία μέσου πεδίου) που περιγράφεται απ' τους κρίσιμους εκθέτες [68]

$$a = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \gamma_m = 2. \tag{3.110}$$

Οι ανηγμένοι κρίσιμοι εκθέτες υπολογίζονται απ' τις σχέσεις (3.82) και είναι

$$\hat{\phi} = 4, \quad \hat{\beta} = 1, \quad \hat{\gamma} = 2, \quad \hat{\delta} = 3, \quad \hat{\eta} = 0. \tag{3.111}$$

3.2.3 Το τοπικό όριο της QED χωρίς σβέση

Το διάγραμμα φάσης του τοπικού NJL μοντέλου χωρίς σβέση δίνεται στο Σχήμα 3.5. Η έντονη γραμμή απεικονίζει στην κρίσιμη γραμμή του μοντέλου, η οποία αντιστοιχεί σε μήκος συσχέτισης $\xi = \frac{m}{\Lambda} = \infty$. Οι υπόλοιπες γραμμές απεικονίζουν τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης για σταθερό a_R και μήκος συσχέτισης ξ. Παρατηρούμε ότι το οι ροές λήγουν στο $\kappa = -\infty$ με διαφορετικές τιμές των a_R και ξ, ενώ δεν φαίνονται να συγκλίνουν προς κάποιο κοινό υπεριώδες σταθερό σημείο. Το μήκος συσχέτισης απειρίζεται μόνο στην περίπτωση $a_R = 0$, δηλαδή η θεωρία διαθέτει ένα τετριμμένο τοπικό όριο, όπου το φορτίο προασπίζεται πλήρως απ΄ την πόλωση του κενού και το μοντέλο εκφυλίζεται σε μια ελεύθερη θεωρία [68]. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της ισχυρής φάσης, λόγω θραύσης της χειραλικής συμμετρίας, θα εμφανίζονται χειραλικά συμπυκνώματα, τα οποία θα αλληλεπιδρούν με δυνάμεις τύπου Yukawa. Στην περίπτωση που η παραπάνω ανάλυση είναι ακριβής, δηλαδή αν εμφανίζεται η κατάσταση μηδενικού φορτίου στην πλήρη QED, η ενεργός σταθερά ζεύξης Yukawa θα εξαφανίζεται στο τοπικό όριο, όπου η θεωρία θα περιγράφει μη-αλληλεπιδρόντα συμπυκνώματα $\bar{\psi}\psi$.

(α)

(β)

ΣΧΗΜΑ 3.5: *Το διάγραμμα φάσης του τοπικού NJL μοντέλου στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης* $(a, \kappa = \frac{N_f G \Lambda^2}{4\pi^2})$. *Η έντονη γραμμή αντιστοιχεί στην κρίσιμη γραμμή του μοντέλου. Οι υπόλοιπες γραμμές απεικονίζουν τις ροές της ομάδας επανακανονικοποίησης κι αντιστοιχούν σε σταθερό* a_R *και σταθερό μήκος συσχέτισης* ξ. [68]

Σημειώνουμε ότι ενώ η βάθμιση μέσου πεδίου φαίνεται να υποστηρίζεται και απ΄ τις μελέτες της QED στο πλέγμα για μεγάλο N_f [73, 82, 87], υπάρχει πιθανότητα η θεωρία μέσου πεδίου να παρουσιάζει ένα μη-τετριμμένο συνεχές όριο [77]. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι ο συνυπολογισμός της επίδρασης των μαγνητικών δυνάμεων στην πόλωση του κενού, μπορεί να τροποποιήσει ριζικά την παραπάνω εικόνα. Συγκεκριμένα, τα παραπάνω αποτελέσματα στηρίζονται στην προσέγγιση γυμνής κορυφής. Η προσέγγιση αυτή δικαιολογείται, όπως είδαμε, απ' το γεγονός ότι οι διορθώσεις της συνάρτησεις κορυφής φθίνουν γρήγορα σε μεγάλες ενέργειες (Εξ. 3.49, 3.50). Επισημαίνουμε όμως ότι η ταυτότητα Ward (3.47) δε θέτει περιορισμούς στο εγκάρσιο κομμάτι της συνάρτησης κορυφής, το οποίο συζεύγεται με τον φωτονικό διαδότη. Η επίδραση των μαγνητικών φαινομένων μπορεί να συμπεριληφθεί στο φαινόμενο της πόλωσης του κενού, συνυπολογίζοντας το εγκάρσιο κομμάτι της συνάρτησης κορυφής στη λύση των εξισώσεων SD. Καθώς όμως οι μαγνητικές δυνάμεις υποβαθμίζουν το φαινόμενο της πόλωσης του κενού[28], αποδεικνύεται τελικά ότι ο συνυπολογισμός των μαγνητικών φαινομένων (εγκάρσιας συνάρτησης κορυφής) οδηγεί σε απουσία πλήρους προάσπισης στις αβελιανές θεωρίες [88]. Κάτι τέτοιο μπορεί να σημαίνει ότι η πλήρης QED είναι μια μη-τετριμμένη θεωρία στο τοπικό όριο.

Συνοψίζοντας, οι μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι σήμερα, συγκλίνουν στο ότι η QED εκφυλίζεται σε μια τετριμμένη θεωρία χωρίς αλληλεπιδράσεις στο όριο $\Lambda \to \infty$. Αν η εικόνα αυτή ισχύει και για την ακριβή (χωρίς προσεγγίσεις) θεωρία, τότε η QED θα πρέπει να ειδωθεί ως μια ενεργή θεωρία χαμηλών ενεργειών, η οποία στην ασθενή φάση της περιγράφει αλληλεπιδρόντα φερμιονικά, αντιφερμιονικά και φωτονικά πεδία και στην ισχυρή της φάση περιγράφει αλληλεπιδρόντα σύνθετα βαθμωτά και ψευδοβαθμωτά μποζόνια (χειραλικά συμπυκνώματα $\bar{\psi}\psi$). Σε κάποια κλίμακα αποκοπής $\Lambda_{\mathrm{QED}} < \infty$, αναμένουμε τότε να εμφανίζεται μια νέα φυσική θεωρία [30, 73, 89].

[28]Στο φαινόμενο της πόλωσης του κενού, τα ζεύγη $\bar{\psi}\psi$ δημιουργούνται στην κατάσταση $L = 0$, $S = 0$ με αντιπαράλληλες μαγνητικές ροπές. Οι μαγνητικές δυνάμεις ευνοούν την ευθυγράμμιση των μαγνητικών ροπών και συνεπώς υποβαθμίζουν την πόλωση του κενού.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α′

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Με βάση το 1ο θεώρημα του Wick μπορεί να αποδειχθεί ότι [7]

$$\langle 0|T\{AB_1B_2\cdots B_i\cdots B_n\}|0\rangle = \sum_{i=1}^{n} \pm\langle 0|T\{\overline{AB_1B_2\cdots B_i}\cdots B_n\}|0\rangle \qquad (\mathrm{A}'.1)$$

και

$$\overline{A_1A_2} = T\{A_1A_2\} - N\{A_1A_2\}. \qquad (\mathrm{A}'.2)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$\overline{\psi(x)S} = -i\int dy T\{\overline{\psi(x)\mathcal{H}_I}(y)S\}. \qquad (\mathrm{A}'.3)$$

Η απόδειξη έχει ως εξής. Γνωρίζουμε ότι

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)},$$

όπου $S^{(n)}$ ο $n-$οστός όρος που δίνεται απ' την (1.64). Σε 1η τάξη, η (Α′.3) δίνει

$$\overline{\psi(x)S}^{(1)} = -i\int dy T\{\overline{\psi(x)\mathcal{H}_I}(y)\}, \qquad (\mathrm{A}'.4)$$

αφού $S^{(0)} = 1$. Χρησιμοποιώντας την (Α′.2) κι αντικαθιστώντας απ' την (2.2) την αναλυστική έκφραση της Χαμιλτωνιανής, η (Α′.4) γίνεται

$$\overline{\psi(x)S}^{(1)} = -ie\int dy T\left\{T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)A_\mu(y)\} - N\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)A_\mu(y)\}\right\}. \qquad (\mathrm{A}'.5)$$

Η αναλυτική έκφραση του $S^{(1)}$ δίνεται απ' τη σχέση

$$S^{(1)} = -ie\int dy N\{\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)A_\mu(y)\}, \qquad (\mathrm{A}'.6)$$

οπότε απ' την (Α′.2), παίρνουμε

$$\overline{\psi(x)S}^{(1)} = -ieT\left\{\int dy N\{\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)A_\mu(y)\}\right\} + ieN\left\{\int dy N\{\bar{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(y)A_\mu(y)\}\right\}. \qquad (\mathrm{A}'.7)$$

Το δεξί μέλος της (Α′.7) συμπίπτει με την (Α′.5), οπότε σε 1η τάξη η (Α′.3) ισχύει. Επαγωγικά μπορεί να αποδείξει κανείς ότι η (Α′.3) ικανοποιείται σε όλες τις τάξεις του αναπτύγματος της $S^{(n)}$.

Η έκφραση των ακριβών διαδοτών

Είδαμε στο Κεφάλαιο 1 ότι ο ελεύθερος φερμιονικός διαδότης[1] δίνεται απ' τη σχέση (1.47):

$$S_F(x-y) = -i\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle, \tag{A'.8}$$

όπου τα πεδία ψ και $\bar{\psi}$ είναι μη-αλληλεπιδρώντα. Στην περίπτωση που υπάρχουν εξωτερικές πηγές, οι καταστάσεις κενού για τα εισερχόμενα κι εξερχόμενα πεδία θα είναι γενικά διαφορετικές $|0\rangle_{\text{in}} \neq |0\rangle_{\text{out}}$, οπότε η παραπάνω έκφραση θα πρέπει να αντικατασταθεί απ' την

$$G(x,y) \equiv -i\frac{{}_{\text{out}}\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle_{\text{in}}}{{}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}}. \tag{A'.9}$$

Σημειώνουμε ότι οι τελεστές των πεδίων στην (A'.9) είναι στην εικόνα Heisenberg. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, θα χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους τελεστές στην εικόνα αλληλεπίδρασης, οπότε

$$\langle T\{\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n\}\rangle = \frac{\langle 0|T\{A_1\cdots A_n S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{A'.10}$$

Μέσω της (A'.10), η (A'.9) γίνεται

$$G(x,y) = -i\frac{\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{A'.11}$$

Μέσω του θεωρήματος Wick, ο αριθμητής της (A'.11) (στη $n-$οστή τάξη του αναπτύγματος) δίνει

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)S^{(n)}\}|0\rangle = \psi(x)\bar{\psi}(y)\overset{\sqcap}{S}{}^{(n)} + \psi(x)\bar{\psi}(y)S^{(n)}. \tag{A'.12}$$

Το σύμβολο $\overset{\sqcap}{S}{}^{(n)}$ αντιπροσωπεύει το άθροισμα όλων των πιθανών διαγραμμάτων κενού (bubble diagrams). Ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει όλους τους δυνατούς τρόπους ζευγαρώματος των τελεστών $\psi(x)$,$\bar{\psi}(y)$ με τους τελεστές του πίνακα $S^{(n)}$. Μπορούμε συμβολικά να γράψουμε

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)S^{(n)}\}|0\rangle = \sum_m G_m \sum_k V_k, \tag{A'.13}$$

όπου G_m η ακριβής $(m+2)$-σημειακή συνάρτηση συσχέτισης και V_k το διάγραμμα κενού τάξης k. Ο παρονομαστής της (A'.11) δίνει όμως το άθροισμα των διαγραμμάτων κενού σε όλες τις τάξεις, οπότε συνδυάζοντας τις (A'.11) και (A'.13), παίρνουμε

$$G(x,y) = -i\sum_m G_m = -i\frac{\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}, \tag{A'.14}$$

δηλ. η (A'.11) αντιπροσωπεύει τον ακριβή φερμιονικό διαδότη που περιλαμβάνει τις διορθώσεις ακτινοβολίας σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών. Χρησιμοποιώντας την (1.64), η (A'.14) γράφεται

$$G(x,y) = -i\frac{\left\langle 0\left|T\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\mathcal{H}_I(x)\right]\right\}\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|T\left\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\mathcal{H}_I(x)\right]\right\}\right|0\right\rangle}. \tag{A'.15}$$

[1] Θα εξετάσουμε εδώ για οικονομία μόνο την περίπτωση του φερμιονικού διαδότη. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για τον φωτονικό διαδότη. Για μια αναλυτική παρουσίαση της παρούσας συζήτησης, βλ. το αντίστοιχο κεφάλαιο στο [7].

Θα αποδείξουμε τέλος τη σχέση

$$\frac{\delta S}{\delta J^{\mu}(x)} = -iT\{A_{\mu}(x)S\}. \tag{A$'$.16}$$

Παίρνοντας τη συναρτησιακή παράγωγο του $n-$οστού όρου της (1.64) ως προς την εξωτερική πηγή J^{μ}, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^{(n)}}{\delta J^{\mu}(x)} &= \frac{(-i)^n}{n!}\left[\int dx_1\cdots dx_n\left(T\left\{\frac{\delta\mathcal{H}_I(x_1)}{\delta J^{\mu}(x)}\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\right\}+\cdots+T\left\{\mathcal{H}_I(x_1)\cdots\frac{\delta\mathcal{H}_I(x_n)}{\delta J^{\mu}(x)}\right\}\right)\right] \\ &= \frac{(-i)^n}{(n-1)!}\int dx_1\cdots dx_n T\left\{\frac{\delta\mathcal{H}_I(x_1)}{\delta J^{\mu}(x)}\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\right\} \end{aligned} \tag{A$'$.17}$$

Απ′ τη (2.2), έχουμε

$$\frac{\delta\mathcal{H}_I(x_1)}{\delta J^{\mu}(x)} = \delta(x-x_1)A_{\mu}(x_1). \tag{A$'$.18}$$

Αντικαθιστώντας την (Α′.19) στην (Α′.17), παίρνουμε

$$\frac{\delta S^{(n)}}{\delta J^{\mu}(x)} = -i\frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!}\int dx_1\cdots dx_n T\{A_{\mu}(x)\mathcal{H}_I(x_2)\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\} = -iT\{A_{\mu}(x)S^{(n-1)}\}. \tag{A$'$.19}$$

Αθροίζοντας τους όρους της (Α′.19) από 0 έως ∞ καταλήγουμε στη σχέση (Α′.16).

Παραρτημα Β′

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Απόδειξη της Εξ. (3.12)

Θα αποδείξουμε εδώ την Εξ. (3.12). Ξεκινώντας απ′ την Εξ. (3.10) και πραγματοποιώντας τους μετασχηματισμούς (3.11), έχουμε

$$\int d^4k \frac{1}{q^2} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^3 \sin^2\theta}{k^2 + p^2 - 2kp\cos\theta} dk d\theta. \tag{B′.1}$$

Για να πραγματοποιήσουμε την $\theta-$ολοκλήρωση, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση [90]

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^{2r}\theta}{(1 + 2a\cos\theta + a^2)^n} = B\left(r + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) F(n, n-r; r+1; a^2), \tag{B′.2}$$

όπου $\mathrm{Re}[r] > -\frac{1}{2}$, $|a| < 1$, B η συνάρτηση βήτα και F η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Εφαρμόζοντας τη σχέση (B′.2) για $r = 1$, $n = 1$, $a = \frac{k}{p}$, παίρνουμε

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{k^2 + p^2 - 2pk\cos\theta} = B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\theta(p^2 - k^2)}{p^2} F\left(1, 0; 2; \frac{k^2}{p^2}\right) + \frac{\theta(k^2 - p^2)}{k^2} F\left(1, 0; 2; \frac{p^2}{k^2}\right)\right] \tag{B′.3}$$

κι επειδή

$$\begin{aligned} B\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}, \\ F\left(1, 0; 2; \tfrac{k^2}{p^2}\right) &= F\left(1, 0; 2; \tfrac{p^2}{k^2}\right) = 1, \end{aligned} \tag{B′.4}$$

η (B′.1) γίνεται τελικά

$$\int d^4k \frac{1}{q^2} = 4\pi \int_0^{\infty} dk \frac{\pi k^3}{2} \left[\frac{\theta(p^2 - k^2)}{p^2} + \frac{\theta(k^2 - p^2)}{k^2}\right] = \pi^2 \int_0^{\infty} dk^2 \left[\frac{k^2}{p^2}\theta(p^2 - k^2) + \theta(k^2 - p^2)\right]. \tag{B′.5}$$

Αντικαθιστώντας τη (B′.5) στην (3.10), καταλήγουμε στην Εξ. (3.12).

Απόδειξη της Εξ. (3.16)

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την Εξ. (3.16). Αντικαθιστώντας τις (3.11) στην (3.15) κι ορίζοντας $a = \frac{e^2}{4\pi}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} &= 1 - \frac{a}{2\pi^2 p^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 \mathcal{F}(k^2)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k^2)} \\ &\times \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{q^2} \left[\frac{2p^2k^2\sin^2\theta}{q^2} - 3p^2k^2\cos\theta + \xi \frac{(k^2+p^2)kp\cos\theta - 2k^2p^2}{q^2} \right]. \end{aligned} \tag{B'.6}$$

Έχουμε

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^4\theta}{q^4} = \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^4\theta}{(p^2+k^2-2pk\cos\theta)^2}, \tag{B'.7}$$

οπότε εφαρμόζοντας τη σχέση (B′.2) με $r = 2$, $n = 2$, $a = \frac{k}{p}$, παίρνουμε

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^4\theta}{q^4} = B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^4} F\left(2, 0; 3; \frac{k^2}{p^2}\right) + \frac{\theta(k^2-p^2)}{k^4} F\left(2, 0; 3; \frac{p^2}{k^2}\right) \right] \tag{B'.8}$$

κι επειδή

$$\begin{aligned} B\left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{3\pi}{8}, \\ F\left(2, 0; 3; \tfrac{k^2}{p^2}\right) &= F\left(2, 0; 3; \tfrac{p^2}{k^2}\right) = 1, \end{aligned} \tag{B'.9}$$

η (B′.7) γίνεται

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^4\theta}{q^4} = \frac{3\pi}{8} \left[\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^4} + \frac{\theta(k^2-p^2)}{k^4} \right]. \tag{B'.10}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{q^2} &= \frac{1}{2pk} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta(p^2+k^2-q^2)}{q^2} \\ &= \frac{1}{2pk} \left[(p^2+k^2) \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{q^2} - \int_0^{\pi} d\theta \sin^2\theta \right]. \end{aligned} \tag{B'.11}$$

Χρησιμοποιώντας τη (B′.3), η (B′.11) γίνεται τελικά

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{q^2} = \frac{\pi}{4kp} \left[\frac{k^2}{p^2}\theta(p^2-k^2) + \frac{p^2}{k^2}\theta(k^2-p^2) \right]. \tag{B'.12}$$

Με τη βοήθεια των Εξ. (B′.10) και (B′.12), υπολογίζουμε

$$\int_0^{\pi} d\theta \left(\frac{2p^2k^2\sin^4\theta}{q^4} - \frac{3p^2k^2\sin^2\theta\cos\theta}{q^2} \right) = 0. \tag{B'.13}$$

Έχουμε

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{q^4} = \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{(p^2+k^2-2pk\cos\theta)^2}, \tag{B'.14}$$

οπότε εφαρμόζοντας τη σχέση (B′.2) με $r = 1$, $n = 2$, $a = \frac{k}{p}$, παίρνουμε

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{q^4} = B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^4} F\left(2, 1; 2; \frac{k^2}{p^2}\right) + \frac{\theta(k^2-p^2)}{k^4} F\left(2, 1; 2; \frac{p^2}{k^2}\right) \right] \tag{B'.15}$$

κι επειδή

$$F\left(2,1;2;\frac{k^2}{p^2}\right)=F\left(2,1;2;\frac{p^2}{k^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}, \tag{B$'$.16}$$

η (B′.14) γίνεται

$$\int_0^{\pi}d\theta\frac{\sin^2\theta}{q^4}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^2(p^2-k^2)}+\frac{\theta(k^2-p^2)}{k^2(k^2-p^2)}\right]. \tag{B$'$.17}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}d\theta\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{q^4} &= \frac{1}{2pk}\int_0^{\pi}d\theta\frac{\sin^2\theta(p^2+k^2-q^2)}{(p^2+k^2-2pk\cos\theta)^2}\\ &= \frac{\pi}{2pk}\left[\frac{k^2}{p^2}\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^2-k^2}+\frac{p^2}{k^2}\frac{\theta(k^2-p^2)}{k^2-p^2}\right].\end{aligned} \tag{B$'$.18}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (B′.13), (B′.17) και (B′.18), η (B′.6) γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{F}} &= 1-\frac{a\xi}{2\pi^2p^2}\int_0^{\Lambda^2}dk^2\frac{k^2\mathcal{F}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[(k^2+p^2)kp\int_0^{\pi}d\theta\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{q^4}-2k^2p^2\int_0^{\pi}d\theta\frac{\sin^2\theta}{q^4}\right]\\ &= 1-\frac{a\xi}{2\pi^2p^2}\int_0^{\Lambda^2}dk^2\frac{k^2\mathcal{F}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{\pi k^2}{2p^2}(k^2-p^2)\frac{\theta(p^2-k^2)}{p^2-k^2}+\frac{\pi p^2}{2k^2}\frac{\theta(k^2-p^2)}{k^2-p^2}\right]\\ &= 1+\frac{a\xi}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2}dk^2\frac{\mathcal{F}(k^2)}{k^2+\mathcal{M}^2(k^2)}\left[\frac{k^4}{p^4}\theta(p^2-k^2)+\theta(k^2-p^2)\right].\end{aligned} \tag{B$'$.19}$$

Υπολογισμός της a_c και του νόμου βάθμισης στη γραμμικοποίηση $\mathcal{M}^2(0)=m^2$

Γραμμικοποιώντας την Εξ. (3.18) μέσω της αντικατάστασης $\mathcal{M}^2(0)=m^2$, παίρνουμε

$$\mathcal{M}(p^2)=m_0+\frac{3a}{4\pi}\left[\frac{1}{p^2}\int_0^{p^2}dk^2\frac{k^2\mathcal{M}(k^2)}{k^2+m^2}+\int_{p^2}^{\Lambda^2}dk^2\frac{\mathcal{M}(k^2)}{k^2+m^2}\right]. \tag{B$'$.20}$$

Μέσω διαδοχικών παραγωγίσεων ως προς p^2, μετατρέπουμε τη (B′.20) στη διαφορική εξίσωση

$$(p^2)^2\frac{d^2\mathcal{M}(p^2)}{d(p^2)^2}+2p^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}+\frac{3a}{4\pi}\frac{p^2}{p^2+m^2}\mathcal{M}(p^2)=0, \tag{B$'$.21}$$

με τις συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{p^2\to 0}\left[(p^2)^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}\right] = 0, \tag{B$'$.22}$$

$$\lim_{p^2\to\Lambda^2}\left[p^2\frac{d\mathcal{M}(p^2)}{dp^2}+\mathcal{M}(p^2)\right] = m_0. \tag{B$'$.23}$$

Εισάγοντας τη μεταβλητή $z=-\frac{p^2}{m^2}$, η (B′.21) παίρνει τη μορφή

$$z(1-z)\frac{d^2\mathcal{M}(z)}{dz^2}+2(1-z)\frac{d\mathcal{M}(z)}{dz}-\frac{3a}{4\pi}\mathcal{M}(z)=0, \tag{B$'$.24}$$

η οποία είναι μια υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση με γενική λύση

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p^2) &= C_1 F\left(\frac{1+\sigma}{2},\frac{1-\sigma}{2};2;-\frac{p^2}{m^2}\right)+C_2\left[\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{1+\sigma}{2}} F\left(\frac{1+\sigma}{2},\frac{\sigma-1}{2};1+\sigma;-\frac{p^2}{m^2}\right)\right.\\ &+ \left.\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{1-\sigma}{2}} F\left(\frac{1-\sigma}{2},\frac{-\sigma-1}{2};1-\sigma;-\frac{p^2}{m^2}\right)\right], \qquad \text{(Β}'\text{.25)}\end{aligned}$$

όπου $\sigma=\sqrt{1-\frac{3a}{\pi}}$. Η κρίσιμη σταθερά ζεύξης a_c προσδιορίζεται απ' τη συνθήκη μηδενισμού του σ, δηλαδή

$$a_c=\frac{\pi}{3}. \qquad \text{(Β}'\text{.26)}$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της (Β′.25) στο $p^2=0$ και χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη (Β′.22), βρίσκουμε $C_2=0$ και $C_1=m$, οπότε

$$\mathcal{M}(p^2)=mF\left(\frac{1+\sigma}{2},\frac{1-\sigma}{2};2;-\frac{p^2}{m^2}\right). \qquad \text{(Β}'\text{.27)}$$

Η ασυμπτωτική μορφή της (Β′.27) για $p^2\gg m^2$ είναι

$$\mathcal{M}(p^2) \simeq m\left[\frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+3}{2}\right)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}}+\frac{\Gamma(-\sigma)}{\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-\sigma}{2}\right)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{\sigma+1}{2}}\right], \qquad a<a_c, \qquad \text{(Β}'\text{.28)}$$

$$\mathcal{M}(p^2) \simeq \frac{2}{\pi}m\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\ln\frac{p^2}{m^2}+2(2\ln 2-1)\right], \qquad a=a_c, \qquad \text{(Β}'\text{.29)}$$

$$\mathcal{M}(p^2) \simeq m\left(\frac{8\operatorname{cth}\frac{\pi\tau}{2}}{\pi\tau(\tau^2+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\frac{\tau}{2}\ln\frac{p^2}{m^2}+\tau(2\ln 2-1)\right], \qquad a>a_c, \qquad \text{(Β}'\text{.30)}$$

όπου $\tau=\sqrt{\frac{3a}{\pi}-1}$. Αντικαθιστώντας τώρα τη συνοριακή συνθήκη (Β′.23) στις (Β′.28), (Β′.29), (Β′.30), παίρνουμε

$$m_0 \simeq m\frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+3}{2}\right)}\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^{\sigma-1}, \qquad a<a_c, \qquad \text{(Β}'\text{.31)}$$

$$m_0 \simeq m\frac{4}{\pi}\left(\ln\frac{\Lambda}{m}+2\ln 2-1\right)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^{-1}, \qquad a=a_c, \qquad \text{(Β}'\text{.32)}$$

$$m_0 \simeq \frac{m^2}{\Lambda}\left(\frac{2\operatorname{cth}\frac{\pi\tau}{2}}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\tau\ln\frac{\Lambda}{m}+\arg\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma^2\left(\frac{1+i\tau}{2}\right)}\right), \qquad a>a_c. \qquad \text{(Β}'\text{.33)}$$

Απ' τις σχέσεις (Β′.31), (Β′.32), παρατηρούμε ότι για $m_0=0$ και $\Lambda<\infty$, η φυσική μάζα m μηδενίζεται, δηλαδή για $a\le a_c$ δεν παρουσιάζεται θραύση της χειραλικής συμμετρίας. Απ' τη σχέση (Β′.31) μπορούμε να δούμε επιπλέον ότι στο όριο $\Lambda\to\infty$ η γυμνή μάζα m_0 μηδενίζεται. Συνεπώς η φυσική μάζα m οφείλεται αποκλειστικά στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, δηλαδή είναι καθαρά δυναμικής προέλευσης [91]. Θέτοντας $m_0=0$ στην Εξ. (Β′.33), παίρνουμε

$$\sin\left(\tau\ln\frac{\Lambda}{m_{dyn}}+\arg\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma^2\left(\frac{1+i\tau}{2}\right)}\right)=0, \qquad \text{(Β}'\text{.34)}$$

η οποία διαθέτει άπειρες λύσεις. Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις συναρτήσεις Γ γύρω απ' το σημείο $\tau=0$, παίρνουμε

$$m_{dyn}^{(k)}\simeq\Lambda\exp\left(2\ln 2-\frac{k\pi}{\tau}\right), \quad k=1,2,\ldots \qquad \text{(Β}'\text{.35)}$$

κι επειδή το ευσταθές κενό αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της δυναμικής μάζας ($k = 1$), η σχέση (Β΄.35) δίνει

$$m_{dyn} \simeq 4\Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{\tau}\right), \tag{Β΄.36}$$

απ΄ όπου συνάγουμε το νόμο βάθμισης Miransky

$$\frac{\Lambda}{m} = \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{\frac{a}{a_c} - 1}} - 2\ln 2\right), \tag{Β΄.37}$$

με $A = \pi$ και $B = 2\ln 2$. Όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.1.4, η παραπάνω εικόνα (δηλ. ότι η δυναμική θραύση της χειραλικής συμμετρίας συμβαίνει μόνο για $a > a_c$) διατηρείται και στο τοπικό όριο $\Lambda \to \infty$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ′

ΟΙ ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η διαφορική εξίσωση

$$z(1-z)y''(z) + [c-(a+b+1)z]\, y'(z) - aby(z) = 0, \tag{Γ′.1}$$

ονομάζεται υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση. Η αναλυτική λύση της (Γ′.1) μπορεί να γραφτεί στη μορφή [92]

$$y(z) = F(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{με } a_0 = 1. \tag{Γ′.2}$$

Αντικαθιστώντας τη (Γ′.2) στη (Γ′.1), παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$a_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} a_k, \quad \text{για } k \geq 0. \tag{Γ′.3}$$

Αν $c \in \mathbb{Z}_+^*$, οι συντελεστές a_k υπολογίζονται απ′ τη σχέση

$$a_k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(c+k)}, \tag{Γ′.4}$$

οπότε η λύση της Εξ. (Γ′.1) παίρνει τελικά τη μορφή

$$y(z) = F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(c+k)} z^k. \tag{Γ′.5}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ′

Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ HAMMERSTEIN

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ δεδομένη συνάρτηση. Ο **τελεστής Nemytskii** N_f αποδίδει σε κάθε συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ τη συνάρτηση $N_f(u) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται απ΄ τη σχέση

$$N_f\left[u(x)\right] = f\left(x, u(x)\right), \quad \text{με } x \in \Omega. \tag{Δ′.1}$$

Έστω τώρα ένα φραγμένο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και $K : \Omega^2 \to \mathbb{R}$. Ο τελεστής $F : L^q(\Omega; \mathbb{R}^n) \to L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ που ορίζεται απ΄ τη σχέση

$$F\left[u(x)\right] = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \quad \text{με } x \in \Omega, \tag{Δ′.2}$$

ονομάζεται **τελεστής Fredholm**[1]. Συνθέτοντας τους τελεστές Nemytskii και Fredholm βάσει της σχέσης

$$H = FN_f, \tag{Δ′.3}$$

παίρνουμε τον μη-γραμμικό ολοκληρωτικό **τελεστή Hammerstein** που ορίζεται απ΄ τη σχέση [93]

$$H\left[u(x)\right] = \int_\Omega K(x,y) f\left(y, u(y)\right) dy, \quad \text{με } x \in \Omega. \tag{Δ′.4}$$

Οι μη-γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις της μορφής

$$H\left[u(x)\right] = u(x) \Leftrightarrow u(x) = \int_\Omega K(x,y) f\left(y, u(y)\right) dy, \tag{Δ′.5}$$

ονομάζονται **ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hammerstein** [94]. Για την έκθεση κι απόδειξη των μαθηματικών θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων της Εξ. (Δ′.5), παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία [93–97]. Εδώ θα ασχοληθούμε περισσότερο με τη συμπεριφορά των φυσικών συστημάτων που μπορούν να περιγραφούν από εξισώσεις Hammerstein.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον από φυσικής πλευράς παρουσιάζει το γεγονός ότι μια μετάβαση φάσης μπορεί να προσεγγιστεί μέσω των λύσεων συγκεκριμένων μη-γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, σε μια σειρά από φυσικά συστήματα, οι μεταβάσεις φάσεις λαμβάνουν χώρα όταν η μη-γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση που περιγράφει κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα του συστήματος[2] αποκτά νέες λύσεις. Τα σημεία στα οποία η αρχική λύση μεταβάλλεται ονομάζονται σημεία διακλάδωσης κι οι διακλαδωτικές λύσεις

[1] Σημειώνουμε ότι $p, q \in [1, \infty]$ και $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ συμβολίζει τον χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ με

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty.$$

[2] Παραδείγματος χάριν, τη συνάρτηση κατανομής ή τη συνάρτηση ιδιοενέργειας.

της ολοκληρωτικής εξίσωσης σηματοδοτούν την αστάθεια της αρχικής φάσης και τη μετάβαση σε μια νέα φάση [97]. Έτσι, για ένα σύστημα που περιγράφεται απ' τη συνάρτηση

$$F(q,T) = F(0,T) + \frac{a}{2}q^2 + \frac{b}{4}q^4, \tag{Δ'.6}$$

με $a = a(T - T_c)$, θα υπάρχει μια μετάβαση φάσης 2ης τάξης στο σημείο $(0,0)$, το οποίο θα αντιστοιχεί σε ένα σημείο διακλάδωσης της αρχικής λύσης $q_e = 0$, όπου q_e η ευσταθής λύση που προσδιορίζεται απ' τα ακρότατα της (Δ'.6). Όπως φαίνεται στο Σχήμα Δ'.1, η αρχική λύση $q_e = 0$ γίνεται ασταθής για $T < 0$ κι αντικαθίσταται από 2 διαφορετικές λύσεις [98].

ΣΧΗΜΑ Δ'.1: *Το διάγραμμα διακλάδωσης για μια μετάβαση φάσης 2ης τάξης. Η διακεκομένη γραμμή υποδηλώνει ασταθή λύση, ενώ οι συνεχείς γραμμές απεικονίζουν τις ευσταθείς λύσεις.*

Έχει αποδειχθεί ότι η μελέτη των μεταβάσεων φάσης σε μια σειρά από διαφορετικά φυσικά συστήματα μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα της θεωρίας διακλαδώσεων. Επιπλέον, φαίνεται ότι τα συστήματα αυτά περιγράφονται από μη-γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hammerstein [98]. Συνεπώς, η μελέτη των μεταβάσεων φάσης μπορεί να προσεγγιστεί μέσω του προσδιορισμού των διακλαδωτικών λύσεων των ολοκληρωτικών εξισώσεων Hammerstein. Τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων της Εξ. (Δ'.5) εξαρτώνται τόσο απ' τη μορφή του πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης $K(x,y)$ όσο και απ' τη μορφή της μη-γραμμικότητας $f(y,u(y))$ και το χωρίο ολοκλήρωσης. Επομένως, για οικονομία χώρου θα αναφερθούμε μόνο στο θεώρημα των Maskawa-Nakajima [41], για την ύπαρξη διακλαδωτικών λύσεων της εξίσωσης χάσματος που παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{M}(x,\lambda) = \lambda \int_0^\infty K(x,y) \frac{y\mathcal{M}(y,\lambda)}{y + \mathcal{M}^2(y,\lambda)} dy. \tag{Δ'.7}$$

Για λόγους θεωρητικής πληρότητας παρουσιάζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα απ' τη θεωρία διακλαδώσεων[3].

Έστω η μη-γραμμική τελεστική εξίσωση

$$\hat{A}(\xi)u = \xi u, \tag{Δ'.8}$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}$, u στοιχείο κάποιου χώρου Banach $\mathbb{B}$ και $\hat{A}$ ένας μη-γραμμικός μετασχηματισμός $F : \mathbb{R} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Αν $\hat{A}(\xi)0 = 0$, η (Δ'.8) είναι μια μη-γραμμική εξίσωση ιδιοτιμών. Θεωρούμε επίσης ότι η $u = 0$ είναι

[3] Βλ. [40] και τις αναφορές στο ίδιο.

μια λύση της (Δ′.8) για κάθε ξ.

Ορισμός 1
Για μια μη-γραμμική εξίσωση ιδιοτιμών της μορφής (Δ′.8), λέμε ότι το $\xi = \xi_i$ είναι ένα **σημείο διακλάδωσης**, αν για κάθε περιοχή $(\xi_i, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}$ υπάρχει λύση της (Δ′.8) με $\|u\| \neq 0$.

Ορισμός 2
Λέμε ότι ο τελεστής $\hat{A}(\xi)$ είναι **γραμμικοποιήσιμος** στο u_0, αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $\hat{L}$ τέτοιος ώστε

$$\hat{A}(\xi)(u - u_0) = \hat{L}(u - u_0) + \gamma, \qquad (\Delta'.9)$$

με

$$\lim_{\|u-u_0\| \to 0} \frac{\|\gamma\|}{\|u - u_0\|} = 0. \qquad (\Delta'.10)$$

Ο $\hat{L}$ είναι μοναδικός και είναι γνωστός ως παράγωγος Fréchet του $\hat{A}(\xi)$ στο u_0

$$\hat{L} = \left.\frac{\partial \hat{A}}{\partial u}\right|_{u_0}. \qquad (\Delta'.11)$$

Θεώρημα 1
Η αναγκαία συνθήκη για να είναι το ξ_i σημείο διακλάδωσης της (Δ′.8) είναι

$$\xi_i \in \mathrm{Sp}\left[\hat{L}\right]. \qquad (\Delta'.12)$$

Θεώρημα 2
Αν ο $\hat{A}$ είναι συμπαγής και $\xi_i \neq 0$ είναι μια ιδιοτιμή του $\hat{L}$ με περιττή πολλαπλότητα, τότε το ξ_i είναι ένα σημείο διακλάδωσης της (Δ′.8).

Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής $\mathcal{M}(x, \lambda)$ στην Εξ. (Δ′.7) πληρεί τα κριτήρια της συμπαγότητας και γραμμικοποιησιμότητας που αναφέρθηκαν παραπάνω [40]. Επομένως, το πρόβλημα της εύρεσης των σημείων διακλάδωσης της (Δ′.7) μπορεί να μετατραπεί σ′ ένα πρόβλημα ιδιοτιμών για την αντίστοιχη γραμμικοποιημένη εξίσωση. Συγκεκριμένα, οι Maskawa και Nakajima, στηριζόμενοι στο θεώρημα σταθερών σημείων (fixed-point theorem) του Schauder [99], απέδειξαν ότι υπάρχει μη-τετριμμένη λύση της (Δ′.7) αν $\lambda > \lambda_{\min}$, όπου $\lambda_{\min}$ η μικρότερη ιδιοτιμή της γραμμικοποιημένης εξίσωσης [41]

$$\bar{\mathcal{M}}(x, \lambda) = \lambda \int_0^\infty K(x, y) \bar{\mathcal{M}}(y, \lambda) dy. \qquad (\Delta'.13)$$

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Είδαμε ότι οι εξισώσεις Schwinger-Dyson παρέχουν πρόσβαση στη μη-διαταρακτική δυναμική της θεωρίας κι επομένως αποτελούν ένα σημείο εκκίνησης για τη μελέτη μη-διαταρακτικών φαινομένων, όπως η θραύση της χειραλικής συμμετρίας. Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων SD καθιστά αδύνατη, μέχρι στιγμής, την επιλυσή τους σε κλειστή μορφή. Η προσέγγιση των λύσεων γίνεται είτε μέσω σχημάτων περικοπής είτε μέσω αριθμητικών μεθόδων.
Όπως διαπιστώσαμε, για το πρόβλημα της δυναμικής παραγωγής μάζας στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική, το σύστημα εξισώσεων SD παίρνει τη μορφή μιας μη-γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Hammerstein. Έτσι, η μελέτη της θραύσης της χειραλικής συμμετρίας μεταπίπτει στο πρόβλημα του προσδιορισμού των διακλαδωτικών λύσεων της εξίσωσης χάσματος. Στην περίπτωση της προσέγγισης σβέσης, η θεωρία διακλαδώσεων μας επέτρεψε να θεμελιώσουμε την ύπαρξη μιας μετάβασης φάσης στην QED_4 που σχετίζεται με τη θραύση της χειραλικής συμμετρίας και να προσδιορίσουμε αναλυτικά τα χαρακτηριστικά της νέας φάσης όπως το κρίσιμο σημείο κι ο νόμος βάθμισης της δυναμικής μάζας. Για την προσέγγιση χωρίς σβέση, είναι αναγκαίο να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους, λόγω της πολυπλοκότητας των εμπλεκόμενων εξισώσεων.
Η μελέτη μη-διαταρακτικών φαινομένων στην QED δεν έχει ακαδημαϊκό χαρακτήρα, αλλά διαθέτει άμεσες εφαρμογές στην ηλεκτροδυναμική των ισχυρών (υπερκρίσιμων) πεδίων που προκύπτουν σε πειράματα βαρέων ιόντων [100–102]. Επιπλέον, η μελέτη τέτοιων φαινομένων στα πλαίσια της QED μπορεί ενδεχομένως να συντελέσει στην κατανόηση αντίστοιχων μη-διαταρακτικών φαινομένων που εμφανίζονται σε μη-αβελιανές κβαντικές θεωρίες πεδίου, όπως ο εγκλωβισμός κι η θραύση της χειραλικής συμμετρίας στην QCD.

Βιβλιογραφια

[1] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439.

[2] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 914.

[3] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27.

[4] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76** (1949) 769.

[5] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **80** (1950) 440.

[6] J. Schwinger, *Quantum Mechanics : Symbolism of Atomic Measurements*, Springer, 2001.

[7] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, 1969.

[8] W. Pauli, *Phys. Rev.* **58** (1940) 716.

[9] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1958.

[10] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 367.

[11] C. Itzykson, J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications, 2006.

[12] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.

[13] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 486.

[14] A.Lahiri, P. B. Pal, *A First Book of Quantum Field Theory*, Alpha Science International Ltd., 1995.

[15] F.Mandl, G.Shaw, *Quantum Field Theory, Rev.Ed.*, John Wiley & Sons, (1993).

[16] K. G. Wilson, J. Kogut, *Phys. Rep.* **12** (1974) 75.

[17] G. P. Lepage, [arXiv:hep-ph/0506330v1].

[18] M. E. Fischer, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 653.

[19] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736.

[20] T. L. Gill, W. W. Zachary, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 69.

[21] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics, Vol. I*, Taylor & Francis, 2003.

[22] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics, Vol. II*, Institute of Physics Publishing, 2004.

[23] S. Coleman, E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1888.

[24] G. t'Hooft, *Sci. Am.* **242** (1980) 104.

[25] E. P. Wigner, *Proc. Am. Phil. Soc.* **93** (1949) 521.

[26] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.

[27] H. S. Green, *Proc. Phys. Soc.* **A66** (1953) 873.

[28] Y. Takahashi, *Nuovo Cim.* **6** (1957) 371.

[29] R. Williams, *Schwinger-Dyson Equations in QED and QCD, The calculation of fermion-antifermion condensates* (Διδακτορική Διατριβή), University of Durham, 2007.

[30] V. A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*, World Scientific, 1993.

[31] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.

[32] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **85** (1952) 631.

[33] J. Feldman, T. Hurd, L. Rosen, J. Wright, *QED: A Proof of Renormalizability*, Springer Lecture Notes in Physics Vol. 312, Springer, New York, 1988.

[34] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951) 452.

[35] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951) 455.

[36] C. D. Roberts, A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33** (1994) 477.

[37] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, (1965).

[38] J. C. R. Bloch, *Numerical Investigation of Fermion Mass Generation in QED* (Διδακτορική Διατριβή), University of Durham, 1995, [arXiv:hep-ph/0208074v1].

[39] E. E. Tareeva, *Theor. Math. Phys.* **21** (1974) 1189.

[40] G. Cheng, T. K. Kuo, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 6270.

[41] T. Maskawa, H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **52** (1974) 1326.

[42] T. Maskawa, H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **54** (1975) 860.

[43] D. K. Hong, [arXiv:hep-ph/9604241v1].

[44] J. M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2428.

[45] V. A. Miransky, *Nuovo Cimento* **90A** (1985) 149.

[46] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, *Phys. Lett.* **B78** (1978) 136.

[47] R. Fukuda, T. Kugo, *Nucl. Phys.* **B117** (1976) 250.

[48] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **43** (1969) 1.

[49] L. D. Landau, I. M. Khalatnikov, *Sov. Phys. JETP* **2** (1956) 69.

[50] E. S. Fradkin, *Sov. Phys. JETP* **2** (1956) 361.

[51] A. Bashir, A. Raya, *Nucl. Phys.* **B709** (2005) 307.

[52] A. Bashir, A. Raya, *J. Phys.: Conf. Ser.* **37** (2006) 90.

[53] T. Appelquist, K. Lane, U. Mahanta, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1553.

[54] J. S. Ball, T.-W. Chiu, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 2542.

[55] D. C. Curtis, M. R. Pennington, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 4165.

[56] A. Kızılersü, M. Reenders, M. R. Pennington, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 1242 [arXiv:hep-ph/9503238v1].

[57] G. Cheng, T. K. Kuo, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 6119 [arXiv:hep-th/0102206v2].

[58] S. Goldstein, *Phys. Rev.* **91** (1953) 1516.

[59] L. D. Landau, L. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, Vol. 3*, 3rd. Ed., Butterworth-Heinemann, 1981.

[60] W. A. Bardeen, C. N. Leung, S. T. Love, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1230.

[61] W. A. Bardeen, C. N. Leung, S. T. Love, *Nucl. Phys.* **B273** (1986) 649.

[62] L. D. Landau, I. Ya. Pomeranchuk, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **102** (1955) 489.

[63] E. S. Fradkin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **28** (1955) 750.

[64] M. Göckeler, R. Horsley, V. Linke, P. Rakow, G. Schierholz, H. Stüben, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4119.

[65] M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300.

[66] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miranksy, Yu. A. Sitenko, *Riv. Nuovo Cim.* **6** (1983) 1.

[67] K. Kondo, H. Mino, K. Yamawaki, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 2430.

[68] K. Kondo, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 5447.

[69] M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **51** (1974) 1992.

[70] D. Atkinson, H. J. De Groot, P. W. Johnson, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 7629.

[71] L. D. Landau, A. Abrikosov, I. Khalatnikov, *Nuovo Cim. Suppl.* **3** (1956) 80.

[72] K. Kondo, H. Nakatani, *Nucl. Phys.* **B351** (1991) 236.

[73] M. Göckeler, R. Horsley, P. Rakow, G. Schierholz, R. Sommer, *Nucl. Phys.* **B371** (1992) 713.

[74] V. P. Gusynin, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 133.

[75] J. Oliensis, P. W. Johnson, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 656.

[76] K. Kondo, H. Mino, H. Nakatani, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 1509.

[77] K. Kondo, Y. Kikukawa, H. Mino, *Phys. Lett.* **B220** (1989) 270.

[78] J. B. Kogut, E. Dagotto, A. Kocić, *Phys. Lett.* **B232** (1989) 235.

[79] J. B. Kogut, E. Dagotto, A. Kocić, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2416.

[80] E. Dagotto, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B4** (1988) 607.

[81] K. Kondo, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 7239.

[82] M. Göckeler, R. Horsley, E. Laermann, P. Rakow, G. Schierholz, R. Sommer, U.-J. Wiese, *Nucl. Phys.* **B334** (1990) 527.

[83] G. Schierholz, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B20** (1991) 623.

[84] A. M. Horowitz, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B17** (1990) 694.

[85] A. M. Horowitz, *Phys. Lett.* **B244** (1990) 306.

[86] S. Booth, R. Kenway, B. Pendleton, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B17** (1990) 691.

[87] P. E. L. Rakow, *Nucl. Phys.* **B356** (1991) 27.

[88] J. Kogut, E. Dagotto, A. Kocić, *Phys. Lett.* **B213** (1988) 56.

[89] M. Göckeler, R. Horsley, E. Laermann, P. Rakow, G. Schierholz, R. Sommer, U.-J. Wiese, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 567.

[90] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 5th. ed, 1994.

[91] T. A. J. Maris, V. E. Herscovitz, G. Jacob, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 313.

[92] S. Hassani, *Mathematical Physics*, Springer, 1st. ed, 1999.

[93] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[94] A. Hammerstein, *Acta Math.* **54** (1930) 117.

[95] C. L. Dolph, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **31** (1945) 60.

[96] J. Appell, P. P. Zabrejko, *Integr. Equat. Oper. Th.* **16** (1993) 15.

[97] J. D. Weeks, S. A. Rice, J. J. Kozak, *J. Chem. Phys.* **52** (1970) 2416.

[98] J. J. Kozak, *Adv. Chem. Phys.* **40** (1979) 229.

[99] J. Schauder, *Studia Math.* **2** (1930) 171.

[100] W. Greiner, *Quantum Electrodynamics*, 3rd. Ed., Springer, 2002.

[101] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, 1985.

[102] H. Backe, *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 1443; C. Kozhuharov *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 376; A. Belkacem *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1514.